Elméleti evolúcióbiológia

Ciklikus dominancia a háromstratégiás evolúciós játékoknál

Beadandó dolgozat

Kispál András (EYQ0NP)

Fizika BSc. II. évfolyam

Budapest, 2014. május 24.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **2**

1.1. Klasszikus játékelmélet 2

1.2. Evolúciós játékelmélet 3

1.3. Alapfogalmak 4

2. Kő-papír-olló **4**

3. Ciklikus háromstratégiás játék az evolúcióban **8**

4. A kő-papír-olló egyensúlyi állapotai **9**

5. Érdekességek és hasznos linkek **11**

6. Diszkusszió **11**

1. Bevezetés

Amíg a játékelmélet gyökerei egészen Platónig nyúlnak vissza, ez a terület csupán az 1940-es, 1950-es évek környékén vált ismertté a magyar származású Neumann János és John Forbes Nash munkássága révén. A játékelmélet alapjait Neumann János rakta le egy 1928-as munkájában, melyet később Oskar Morgenstern neoklasszikus matematikus-közgazdásszal közösen írt „Játékelmélet és gazdasági viselkedés” (*The Theory of Games and Economic Behavior, 1944*) című művében továbbfejlesztett [1]. Ezt követően John Forbes Nash általánosította Neumann-ék kétszereplős, zéró-összegű játékokra vonatkozó híres egyensúlyi tételét, melyet általános n-szereplős játékokra írt át. Nash eredményeinek köszönhetően, a XX. század közepe táján indult meg a kooperatív játékelmélet fejlődése. Bár Neumann János a póker miatt kezdett a játékelmélettel foglalkozni, ez a tudomány nem a kaszinók világában érzi igazán otthon magát [2]. Olyan konfliktushelyzeteket vizsgál, ahol a véletlen szerepe másodlagos, a döntés alapvetően stratégiai. Segít a piaci, vagy innovációs verseny, a politikai és katonai, vagy éppen biológiai, evolúciós stratégiák jobb megértésében, utat mutat a költség-, kockázat-, vagy a hatalommegosztás terén [3-7].

1. ábra. Neumann János

1.1. Klasszikus játékelmélet

A játék fogalma az ember számára egy társasági tevékenységre utal, mely során meghatározott szabályok által, legalább két ember verseng a legnagyobb nyereség elérésére (sakk, póker, kő-papír-olló, stb.). Tehát a játékelmélet olyan kérdésekkel foglalkozik, amelyekben legalább két döntéshozó próbálja saját hasznosságfüggvényét maximalizálni. Másképpen megfogalmazva: a játék leegyszerűsített és számszerűsített élethelyzet, amit a matematika eszközeivel vizsgálunk és célunk a nyereményünket maximalizálni úgy, hogy közben társunk intelligenciáját is figyelembe vesszük, illetve javaslatot teszünk a játékszabályok

módosítására, amivel elérhetjük a kívánt magatartást. Azokat a játékokat, ahol véges számú játékos és meghatározott számú stratégiahalmaz van, véges játékoknak nevezzük. Minden játékos kifizetőfüggvénye egy n-dimenziós tömbbel adható meg [1], úgynevezett polimátrixxal. Az egyik leghíresebb bimátrix-játék a fogolydilemma, ahol két játékosnak csak két stratégiája van [3,5,6].

1.2. Evolúciós játékelmélet

A hagyományos játékelmélet kutatási területe az elmúlt évtizedekben jelentősen kibővült, teljesen új irányzatként jelent meg az evolúciós játékelmélet. Az evolúciós stabilitás az evolúciós játékelmélet alapvető fogalma. Ez az elmélet olyan folyamatokkal foglalkozik, amelyek során az egyedek játékelméleti értelemben vett kifizetése, illetve utódszáma nem csak saját, hanem a velük kölcsönható egyedek viselkedésétől, illetve fenotípusától is függ. A klasszikus evolúciós játékelmélet az egyedek optimális viselkedését vizsgálja olyan esetekben, amikor az egyedek utódszáma nemcsak a saját, de az egyeddel kölcsönhatásban álló más egyedek viselkedésétől is függ. Mivel főképpen egy fajon belüli eseteket vizsgál, emiatt a mutáns és a rezidens egyedek átlagfitneszeinek összehasonlítására épültek az evolúciós stabilitási fogalmak. Miután a természetes szelekció időben zajló folyamat, így természetes olyan dinamikák bevezetése, amelyek képesek leírni a különböző tulajdonságú egyedek arányának változását. A játékosok itt nem intelligensek, vagyis nem számolják végig az összes lehetőséget, hanem a darwini kiválasztás analógiájára, egyszerűen követik (átveszik) eredményesebb játékostársuk stratégiáját. Ezek a modellek nemcsak az egyszerűségük miatt vonzóak, hanem meglehetősen jól közelítik a tipikus emberi viselkedést is. Az evolúciós játékelmélet egyik legnagyobb sikere éppen az, hogy segítségével értelmezhették az önzetlen magatartás kialakulását az önző egyéni érdekeket követő játékosok között is. Az evolúciós játékelmélet alkalmazási köre jelentősen kibővült, amikor Maynard Smith 1974-ben felismerte, hogy a különböző biológiai élőlények közötti kölcsönhatás leírására is használhatjuk a játékelmélet alapfogalmát, a nyereménymátrixot. Ebben a megfogalmazásban a stratégia szinonimája a biológiai faj, a nyeremény helyett pedig a szaporodási képesség jelenik meg, ami különbözőképpen módosul két fajnál, ha ezek találkoznak (játszanak) egymással [7].

[1] Kétszemélyes játékok esetében bimátrix-játéknak nevezzük.

1.3. Alapfogalmak

- **Játék**: A játékosok lehetséges viselkedését és lényeges körülményeket meghatározó szabálysor által leírt folyamat.

- **Információs halmaz (ismert)**: Például a játék teljes információjú, amennyiben a résztvevők birtokolják az összes vonatkozó adatot (szabályok, lehetséges választások, eddigi események), és a játék véges.

– **Stratégia**: A szabályokat alkalmazó, az ellenfél érzékelt hibáit felhasználó győzelemre, de minimum döntetlenre segítő módszer.

– **Zéró összegű játék**: Az a játék, amelyben a játékosok csak egymás kárára növelhetik nyereségüket.

– **Nem zéró összegű játszma**: Mikor a két fél nemcsak egymástól, hanem egymással együttműködve valamilyen külső forrásból is nyerhet.

– **Kooperatív játék**: Akkor, ha a játékosok között kialakul az együttműködés.

– **Nem kooperatív játék**: Mikor a játékosok egymással versengenek.

– **Neumann tétel:** Minden kétszemélyes, véges, zérusösszegű és teljes információjú játékban található egy egyensúlypont.

2. Kő-papír-olló

A legismertebb ilyen játék a közismert kő-papír-olló, melyet az emberek is szívesen alkalmaznak különböző döntésekhez, hiszen nem található benne nyeregpont, vagyis olyan biztonsági szint amely maximalizálná az egyik játékos esélyeit. A játékosok három jelet mutathatnak: követ (K), papírt (P), ollót (O). A játékszabály a következő:

- A kő kicsorbítja az ollót: $K \to O$
- Az olló elvágja a papírt: $O \to P$
- A papír befedi a követ: $P \to K$

A játék során ha nyerünk 1, döntetlen esetén 0, valamint a játék elvesztésért -1 pont jár.

A játékosok választása	Kő	Papír	Olló
Kő	1	0	-1
Papír	-1	1	0
Olló	0	-1	1

Ezekben a játékokban nem tudjuk megmondani, hogy melyik stratégiát érdemes választani. Neumann javaslata, hogy érdemes a véletlenre bízni a stratégiaválasztást, vagyis valamilyen valószínűség-eloszlás alapján keverni a stratégiánkat. Ehhez definiáljunk a stratégiahalmazon egy eloszlást, amelyet a véletlenszerű stratégia választja ki a játék során, ezáltal érhetjük el, hogy az ellenfelet meglepetésként érje a választás. Ekkor a játékosok stratégiahalmazai az S_k halmazokon értelmezhető eloszlások halmaza, a kifizető függvényei pedig az u_k függvények várható értékei. Az így adódó sztochasztikus játékot a G kevert bővítésnek nevezzük [3].

$$S_k = \{1, 3, ..m_k\} \qquad (1 \leq k \leq n) \tag{1}$$

mivel az S_k halmazok végesek, a rajtuk definiált eloszlások m_k-dimenziós valószínűségi vektorokkal adhatók meg, így a játék kevert bővítésének stratégiahalmazai:

$$S'_k = \{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_k = (x_1, ..., x_{mk}), \mathbf{x}_k \geq \mathbf{0,1}\ ^T\mathbf{x}_k = 1\} \tag{2}$$

Az egységvektor stratégiákat tiszta stratégiának hívjuk, más esetben kevert stratégiának. Az optimális kevert stratégia meghatározáshoz érdemes a játékosoknak a várható nyereségüket maximalizálni, illetve megkeresni a játék kevert egyensúlypontját. Visszatérve a kő-papír-olló játékra, ez a következőket jelenti:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

A mátrixot kifejtve a következő egyenleteknek kell teljesülniük az $\mathbf{x}$ stratégiapárra:

$$\mathbf{x} \geq 0 \tag{4}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \tag{5}$$

$$x_1 - x_2 + \beta \geq 0 \tag{6}$$

$$x_2 - x_3 + \beta \geq 0 \tag{7}$$

$$-x_1 + x_3 + \beta \geq 0 \tag{8}$$

$$\beta \to min. \tag{9}$$

Valamint az $\mathbf{y}$ stratégiapárra is teljesülnie kell a következő összefüggéseknek:

$$\mathbf{y} \geq 0 \tag{10}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1 \tag{11}$$

$$y_1 - y_3 - \alpha \leq 0 \tag{12}$$

$$-y_1 + y_2 + \alpha \leq 0 \tag{13}$$

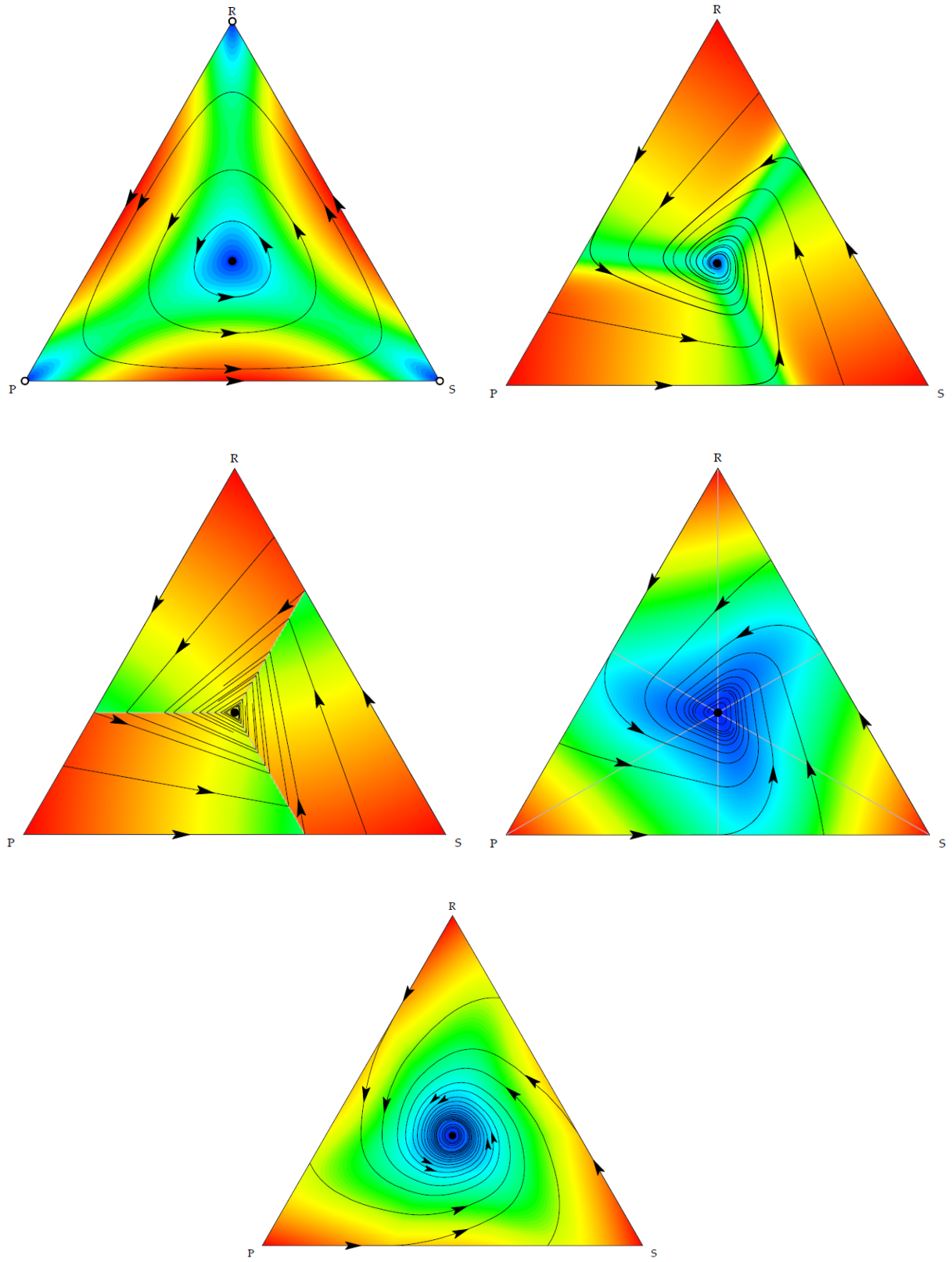
$$-y_2 + y_3 - \alpha \leq 0 \tag{14}$$

$$\alpha \to min. \tag{15}$$

Ezenfelül a kifizető-függvényértékekre teljesülnie kell [4]: $\alpha + \beta = 0$
Tehát mindkét játékos egyetlen Nash-stratégiája [5]:

$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \qquad \mathbf{y} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \tag{16}$$

Így a nyeréshez a következő módszer kell: Vegyünk egy nem cinkelt 6 oldalú kockát, a dobás után kapott eredményt osszuk el 2-vel és a maradékokhoz rendeljük az állapotokat. Tehát mindegyik jelnek $\frac{1}{3}$ esélye lesz, hogy véletlenszerűen megjelenjen



2. ábra. Különböző trajektóriák kialakulása a háromstratégiás játékoknál.

3. Ciklikus háromstratégiás játék az evolúcióban

1982-ben bizonyították, hogy a kő-papír-olló játékelméletileg nem feleltethető meg evolúciósan stabil stratégiának (ESS), vagyis olyan folyamatnak, amelyet ha egy populáció egyedeinek túlnyomó többsége követ, akkor semmilyen más ritka mutáns stratégia nem képes elterjedni. Az első empírikus eredmény B. Sinervo és C. M. Lively nevéhez kötődik, akik 1990 és 1995 között tanulmányozták a kaliforniai foltosoldalú gyíkok (*Uta stransburiana*) hím egyedeinek polimorfizmusát [8]. A megfigyeléseik alapján azt a megállapítást tették, hogy ciklikus dominancia alakult ki a különböző nyakszínű egyedeknél [9]. Észrevették, hogy egy szín dominanciájának a keletkezése, hasonlít a kő-papír-olló játékhoz. A nyakszín szerinti tulajdonságok, illetve a hozzárendelt tárgyak a következőek:

1 Narancssárga foltos (Kő):

- Leghosszabb és legerősebb felépítéssel rendelkeznek a hímek között
- Nem hasonlít a nőstény egyedekhez
- Megtámadja a területére betévedő kék nyakú hímet és a nőstényeit

2 Sötétkék foltos (Olló):

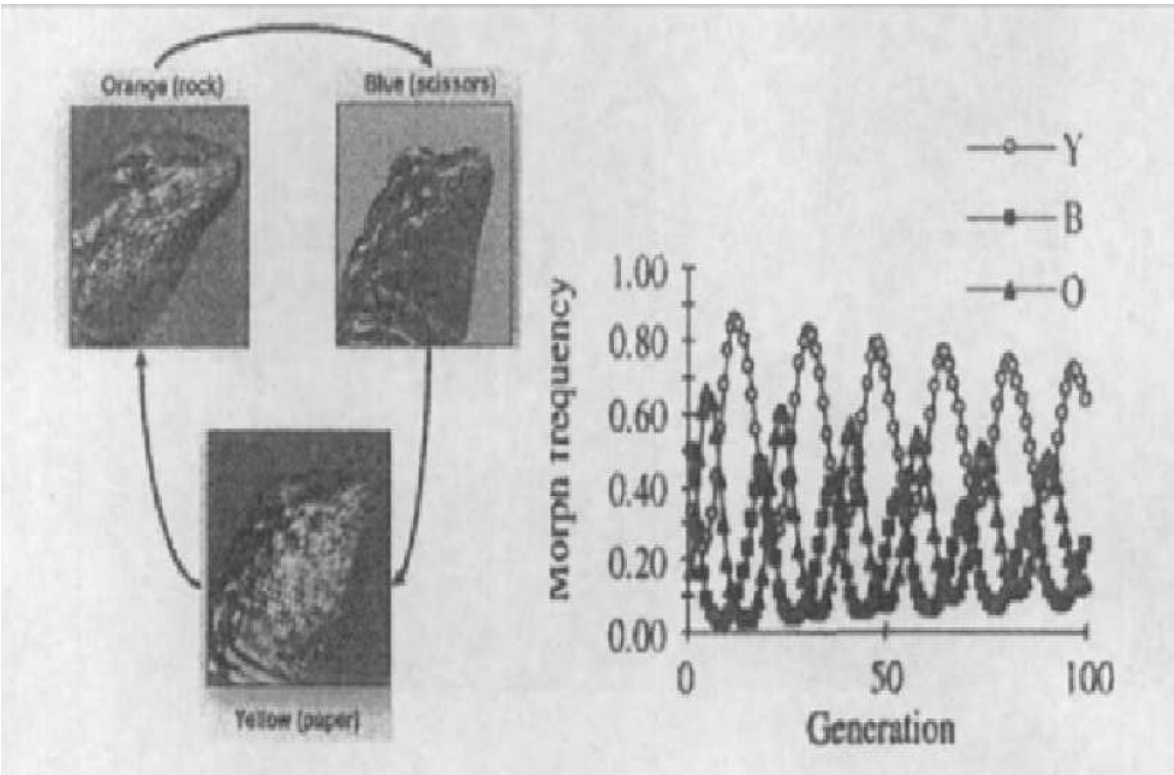
- Közepes méretű a hímek között
- Nem sokkal nagyobb a nőstény egyedeknél
- A sárga hímeket támadja meg

3 Sárga foltos (Papír):

- Legkisebbek a hímek között
- Hasonlít a nőstény egyedekhez
- A narancssárga foltos területén vadászik és szerez nőstény egyedeket

A folyamat a kő-papír-olló játékszabályai szerint történik [10], amely időszakos dominanciát okoz a szaporodásban, de ez időszaktól fűggöen ingadozik. Mivel az uralkodó faj változik, ezért nem fog egyik "szín" sem kipusztulni. Az 1990 és 1995 közötti megfigyelések alapján a következő "színek" voltak domínánsak egy adott évben [8]:

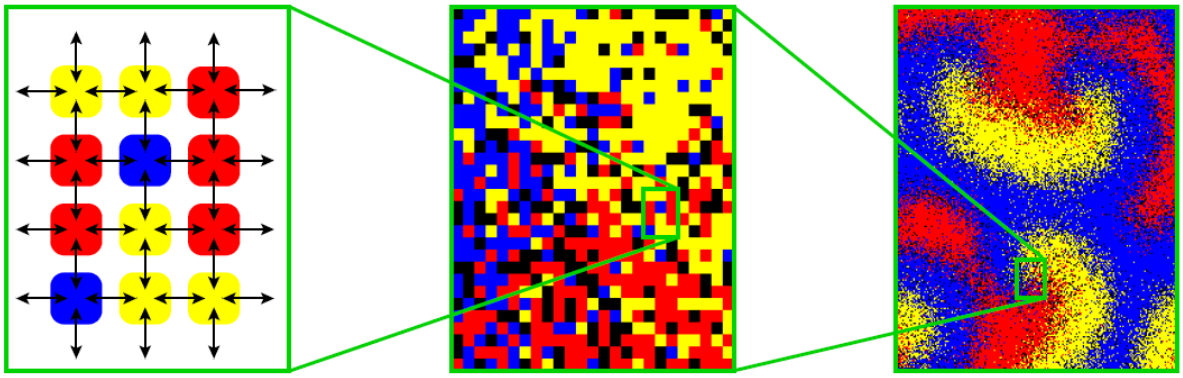
A hímek foltjának színe	Egy adott évben a domináns szín
Kék	1991, 1995
Narancssárga	1992
Sárga	1993, 1994



3. ábra. A hímek versengése, mely hasonlít a kő-papír-olló játékhoz

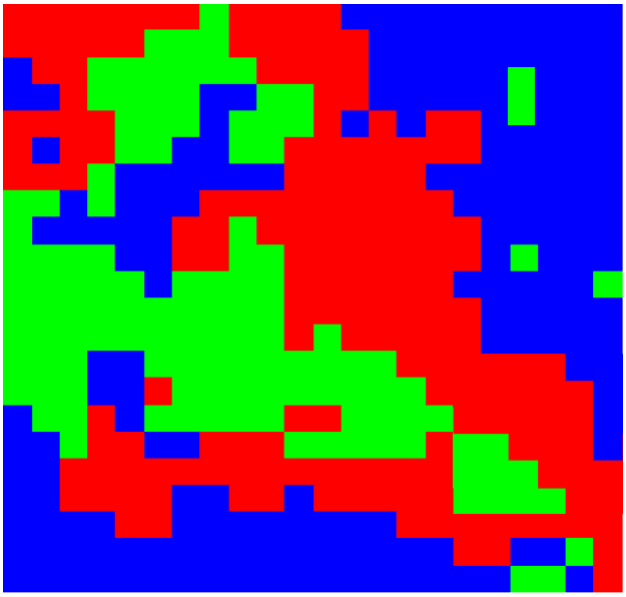
4. A kő-papír-olló egyensúlyi állapotai

A különböző nyakszínű gyíkok eloszlásának a reprezentációját, egy kétdimenziós rácson lehet szemléltetni. Ha minden rácspont fel tud venni egy állapotot és a ciklikus dinamika szabályaival kombináljuk, akkor egy szemléletes jelentése is lehet az elmondottaknak: Itt a játékosok növelését egy adott térrészben, úgy lehetne leírni, hogy egy adott méretű rácsban növekszik a rácspont, ezzel együtt csökken a rácsállandó.



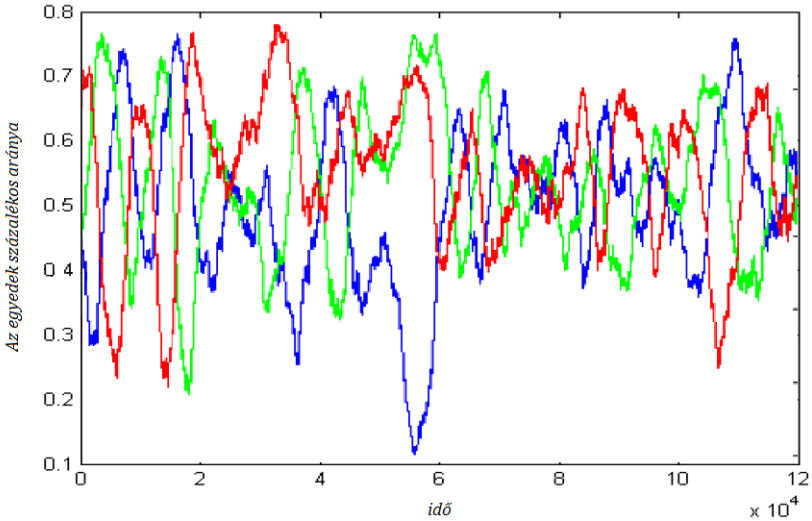
4. ábra. A rácspontok növelésének hasznossága

Kísérletet végeztem, mely során hasonló NxN mátrixxal akartam lejátszani, melynek azt az utasításokat adtam, hogy 1,2 vagy 3 legyen a mátrix elemeinek száma és a végállapotban az adott számhoz, egy színt rendeltem. Ezáltal egy 25x25-ös mátrix esetén a ciklikus dominancia háromstratégiás játék esetén:



5. ábra. A kő-papír-olló játék megoldása 25x25-ös rácson és t=10000 lépés után

Ezután megnéztem, hogy valóban ciklikus folyamatról van-e szó. A meghatározáshoz a következőképpen jártam el. Minden lépés után kiírattattam, hogy a mátrixban hány százalékban található 1-es, 2-es, illetve 3-as.



6. ábra.

5. Érdekességek és hasznos linkek

Hírportálok, ammelyek röviden bemutatják a kő-papír-olló aspektusait és a játékosok befolyásoltságát, valamint az eredeti publikáció:

1) http://444.hu/2014/05/01/megfejtettek-hogyan-lehet-gyozni-ko-papir-olloban/

2) http://www.origo.hu/tudomany/20140504-megvan-a-nyertes-strategia-a-ko-papir-ollo-jatekhoz.html

3) http://arxiv.org/pdf/1404.5199v1.pdf

A kő-papír-ollóhoz használható programok:

1) http://demonstrations.wolfram.com/BiodiversityInSpatialRockPaperScissorsGames/

2) http://demonstrations.wolfram.com/StochasticRockPaperScissorsPopulationDynamics/

6. Diszkusszió

A játékelmélet a matematika egyik interdiszciplináris ága, amely arra kíváncsi, hogy bizonyos játékosok hogyan gondolkodnak. Világunk összetett állat- és növényrendszere képes volt arra, hogy az evolúciós lépések során kialakuljanak olyan stratégiák, mely a túlélést segítik a környezetük minimális megváltoztatásával (minimax-tétel). Láthattuk, hogy egy állatfaj különböző hím egyedei, miként próbálják kialakítani a dominanciájukat. Hasonló viselkedést nem csak látható világunkban tapasztalhatunk, hanem a láthatatlan makroszkópikus élővilágban is. Ennek egyik példája, hogy laboratóriumban vizsgálták az Escherichia coli baktériumokat, melynek során különös figyelmet fordítottak a különböző szegregációik egymással szembeni viselkedésére.

Hivatkozások

[1] John von Neumann, Oskar Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior, Priceton University Press, Princeton, 1944

[2] Kóczy Á. László: A Neumann-féle játékelmélet, Közgazdasági szemle, LII. évf., 2006. január (31-45. o.)

[3] Szidarovszky F. - Molnár S.: Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986

[4] Szabó Péter: Játékelmélet, Egyetemi jegyzet, Debrecen, 2010

[5] Simonovits András: Bevezetés a játékelméletbe, Vázlat, Budapest, 2007

[6] Forgó F. - Pintér M. - Simonovits A. - Solymosi T.: Játékelmélet, Elektronikus jegyzet, Budapest, 2005

[7] Erwin Frey: Evolutionary Game Theory: Theoretical Concepts and Applications to Microbial Communities, 2005

[8] Erine N. Bodine: Game Theory Explains Perplexing Evolutionary Stable Strategy, 2003

[9] B. Sinervo, C. M. Lively: The rock-paper-scissors game and the evolution of alternative male stratégies, Indiana, 1996. március 21.

[10] http://www.usarps.com/rules/