Elméleti evolúcióbiológia beadandó feladat

Kaotikus viselkedés a 4-dimenziós kompetitív Lotka-Volterra rendszerben *

Novák Martin István
ELTE fizika BSc
Biofizikus szakirány

2015. május 15.

*Az esetleges elválasztási hibákért a LaTeX a felelős, mivel ezeket automatikusan kezeli, csak nem mindig jól.

1. Bevezetés

A populációdinamika feladata egy adott biológiai "közösség" méretének és alkotóelemek szerinti összetételének a vizsgálata. Szerteágazó volta miatt nem skatulyázható be egy tudományág alá. Módszerei illetve az előforduló egyenletek, egyenletrendszerek számos más tudományban is megjelennek, például a gazdasági növekedési modellekben, vagy akár a reakciókinetikában*(Vagy éppen fordítva, a reakciókinetika és a gazdasági modellek egyenletei jelennek meg a populációdinamikában. Nézőpont kérdése.).*
Az első populációdinamikai jellegű vizsgálódást Fibonacci folytatta 1202-ben. Modelljében egy nyúlpopuláció növekedését vizsgálta. Vizsgálódásai alatt megalkotta a ma már szinte mindenki által ismert Fibonacci-sort. A modellje arra ad egy kezdetleges választ, hogy ha van egy nyúlpárunk, akkor hány nyúlpár lesz tetszőleges számú hónap múlva, ha az első hónapban csak egyetlen újszülött pár van, az ivarérett kor két hónap, minden termékeny nyúlpár minden hónapban egy újabb párt szül, a "beltenyészet" engedélyezett, valamint a nyulak örökké élnek. Ha bevezetjük a P_n jelölést a nyúlpárok számára, akkor könnyedén látható, hogy az n-edik hónapban a nyúlpárok számára a $P_{n+1} = P_n + P_{n-1}$ rekurzív formula teljesül.
Előrelépés volt a populációdinamikában Euler munkássága, aki az 1784-ben megjelent *Introductio in alaysin infinitorum* művében felvetett négy populációdinamikai problémája közül az egyikben azt tette fel, hogy $P_{n+1} = (1 + x) \cdot P_n$, ahol x a növekedési ráta. Ez alapján, ha a kezdeti populáció P_0 volt, akkor n lépés után a népességet a $P_n = (1 + x)^n \cdot P_0$ egyenlet adja meg, azaz a népesség exponenciálisan növekszik ahogy telik az idő. Ugyanakkor egyből szembeötlik a modell(és ugyan így a Fibonacci féle modellé is) egy hiányossága. A fent leírtak alapján a populáció az idő telésével a végtelenhez tart. Ez értelemszerűen valós körülmények között nem lehetséges, hiszen előbb-utóbb felélné az őt ellátó erőforrásokat.
Ezt a hiányosságot pótolta Robert Malthus, aki az 1798-ban írott *Tanulmány a népesedés törvényéről* című művében arról írt, hogy a népesség mindig gyorsabban nő a termelésnél, így ugyanannyi élelmiszerre egyre több és több egyed jut. Vagyis ahelyett, hogy a gazdasági növekedés hatására a jólét a társadalom minden rétegére kiterjedne, ahogy azt a kor jelentős gondolkodói vélték, Malthus szerint egyes társadalmi csoportok nyomorra, éhezésre és betegségre vannak ítélve. Arról, hogy ez a tendencia ne váljon végzetessé, maga a természet gondoskodik a háborúk, a betegségek és a bűnözés segítségével. Malthus elméleteit nem fordította le a matematika nyelvére, viszont kikövezte az utat a belga Pierre-François Verhulst számára. Verhulst a $\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$ egyenletet javasolta. Látszik, hogy ha P kicsi, a K-hoz képest, akkor visszakapjuk az Euler által megalkotott egyenlethez hasonló, szintén exponenciális növekedésre vezető egyenletet. Amint viszont a P közelít K-hoz, akkor az egyenlet jobb oldala egyre közelebb van 0-hoz, ami azt jelenti, hogy a populáció változása az időben múlásával 0 lesz, azaz beáll egy állandó értékre. K-t a környezet eltartóképességének nevezik.
A harmadik és egyben utolsó ebben a szekcióban megemlített modell a Lotka-Volterra féle predátor-préda modell. Lényege, hogy két faj él benne egymás mellett, melyek közül az egyik vadássza a másikat, a másik viszont nem vadássza az egyiket, hanem végtelen erőforráson él*(tipikusan rókákkal és nyulakkal szokták elmondani, ahol a róka nyulat eszik a nyúl pedig füvet).* Ezek szerint tehát a nyulak számának egyedül csak a rókák száma szabna határt. Igen ám, de a nyulak száma pedig a rókákét befolyásolja, mivel értelemszerűen ha kevés nyúl van, akkor sok róka éhen pusztul, ami esélyt ad a nyulak felszaporodására, ami miatt a rókák is felszaporodnak. De a felszaporodott rókák intenzívebben vadásszák a nyulakat, ami megint a nyulak számának csökkenéséhez vezet és így tovább. A modell matematikai alakja:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

Ebben a nem lineáris differenciálegyenlet-rendszerben az x a préda, az y a ragadozó populáció. A préda növekedési rátáját ragadozók hiányában az a jelöli, míg d a ragadozók növekedési rátája ha tudnak vadászni. A b paraméter a préda csökkenésének mértéke ha vadásszák őket, c pedig a ragadozók csökkenésének a mértéke a természetes halálozásból. Ennek a modellnek több változata van, valamint hasonló logikával nagyon könnyen kiterjeszthető több fajra, valamint időfüggő állandókkal(pl. évszakos változás) még realisztikusabbá tehető. Jelenlegi írásomban a kompetitív Lotka-Volterra modellt fogom vizsgálni.

2. A rendszer

Ez a modell azt írja le, hogy n darab egymás mellett élő, közös erőforrásért egymással vetélkedő(vagy éppen kooperáló) faj populációja hogyan változik az időben.

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \tag{1}$$

Ez az egyenletrendszer tetszőleges számú fajra igaz, jelen esetben 4 faj esetében történik a vizsgálódás. Az egyenletrendszerben x_i az i-edik faj népessége, r_i a reprodukciós rátája, a_{ij} mátrix elemi pedig a kooperációs együtthatók.

2.1. A modell megoldása

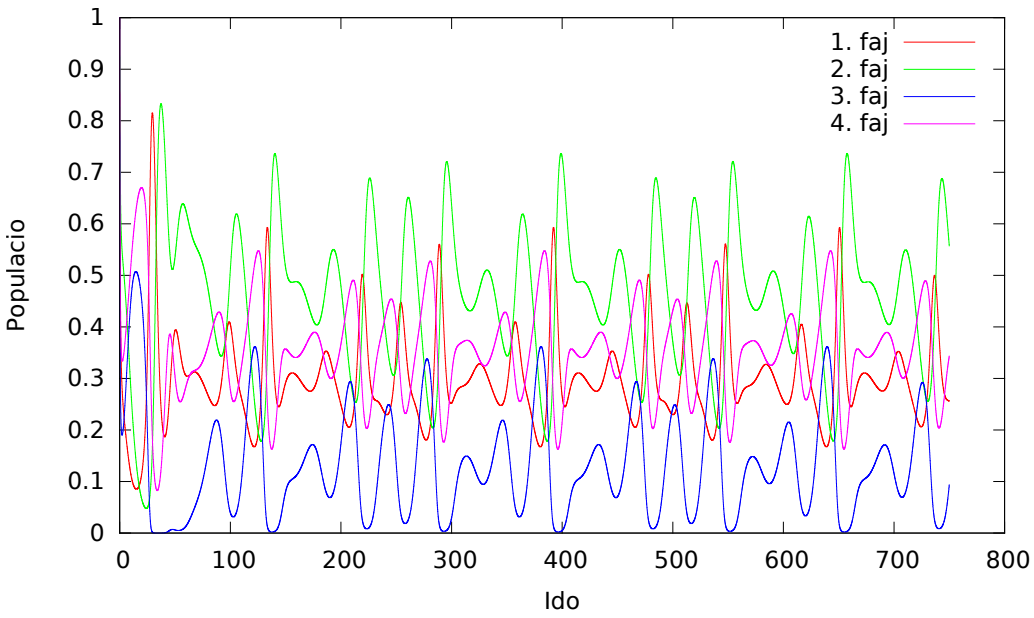
A megoldáshoz C nyelven írtam egy negyedrendű Runge-Kutta módszerrel operáló algoritmust. Ennek a kimenetét gnuplottal ábrázoltam különböző módokon. A fixpontokat meghatározó egyenletrendszert, illetve a fixpontokban vett Jacobi-mátrix sajátértékproblémáját Octave-al oldottam meg. A program paraméterei a következők voltak[1]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1,09 & 1,52 & 0 \\ 0 & 1 & 0,44 & 1,36 \\ 2,33 & 0 & 1 & 0,47 \\ 1,21 & 0,51 & 0,35 & 1 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,73 \\ 1,53 \\ 1,27 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A lépésközt $h = 0,005$-nek választottam, ilyen módon $t = 750$ időegységig összesen 150000 pontban számolta ki a program a populációkat.

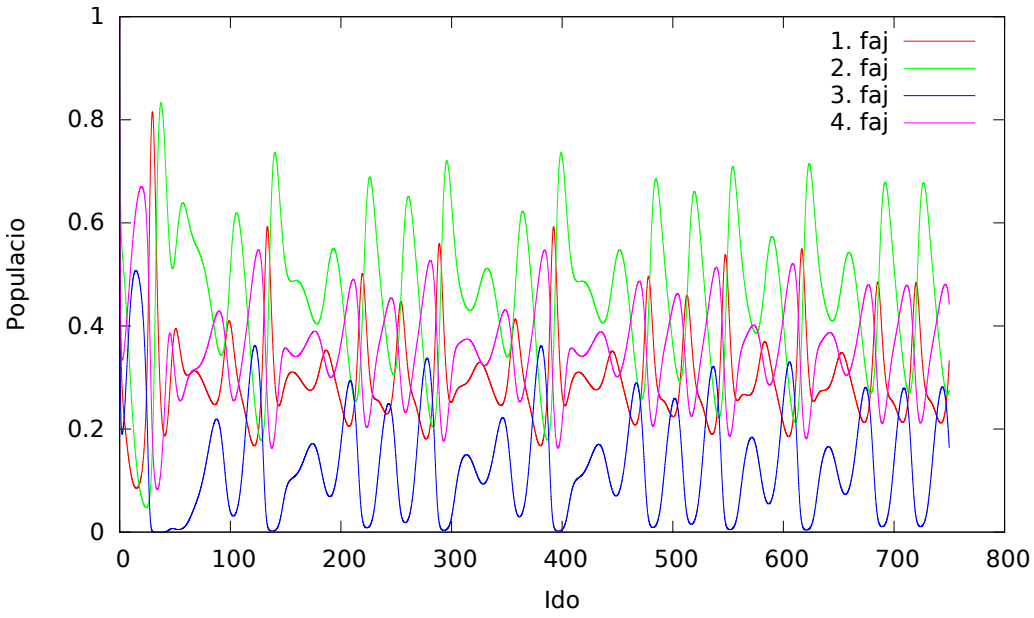
3. Eredmények

A rendszer kaotikussága már ott érződik, hogy mint a kaotikus rendszerek általában, nagyon érzékeny a kezdeti feltételekre. Itt is látható a mindenki által ismert *Pillangó effektus*, ami szerint ha egy lepke csap egyet a szárnyával a Föld egyik oldalán, az tornádót okozhat a másikon. Ez a mondat jól példázza a kezdőfeltételek fontosságát a kaotikus rendszerek esetében. Ez látszik itt is, ugyanis ha az egyik kezdeti feltételt 0,001-el megváltoztatom, akkor az a megoldás az elején még majdnem ugyan az, mint a meg nem változtatott kezdeti feltétel esetén, később azonban átcsap egy teljesen más megoldásba.



1. ábra. Az eredeti kezdeti feltételekkel kapott eredmény

Megfigyelhető, hogy nagyjából az első 500 időegységben szinte teljesen ugyan olyan a két megoldás. Az után, ha jó szemünk van már láthatók nagyon apró különbségek. Ez után ezek egyre nagyobbra nőnek aztán a 600. időpillanat környékén már teljesen más a két megoldás formája.



2. ábra. A módosított kezdeti feltétellel kapott eredmény

3.1. Fixpontvizsgálat

A rendszer fixpontjait az (1)-es egyenletrendszer $\frac{dx_i}{dt} = 0$ feltevéssel vett megoldásai szolgáltatják. Ezek a következők[1]

$$\left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline -0,09 & 1 & 0 & 0 \\ 0,793747 & 1,37375 & -0,84943 & 0 \\ 0 & -1,17493 & 0 & 1,59922 \\ 0 & -1,13879 & 0,307639 & 1,47311 \\ -0,0162352 & 0 & 0,668576 & 0,785643 \\ 1 & 0 & 0 & -0,21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,204596 & 0 & 0,523292 & 0 \\ 0 & 0,56 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,634351 & 0,777977 \\ 0,332745 & 0,61216 & 0 & 0,285176 \\ 0,301303 & 0,458655 & 0,130765 & 0,355742 \end{array}\right)$$

Ez 16 fixpont, abból egy triviális(a mátrix 7. sora), ez a vizsgálatnál egyáltalán nem érdekes. Megfigyelhető, hogy az első 6 sornak legalább az egyik koordinátája negatív. Ez megint nem érdekes, hiszen nem fordulhat elő negatív populáció. A megmaradó 9 fixpont közül 4 darab olyan van, hogy mindegyik koordináta 0, kivéve egyet. Ezek nem mutatnak túl érdekes viselkedést, így nem is foglalkozom a további vizsgálatukkal. A maradék 5 fixpont közül 3 olyan, hogy két faj él túl. Ezen pontok Jacobi-mátrixának sajátértékproblémájának megoldását itt nem közlöm, mert szintén nem túl érdekes, de egyébként mind a három pont esetében a Jacobi-mátrixok sajátértékei tisztán valósak, vegyesen pozitívak és negatívak, így ezen pontok esetében bizonyos irányokban vonzó, illetve taszító viselkedés tapasztalható.

[1] Valójában voltak $c \cdot 10^{-16}$ és ennél kisebb tagok, de ezeket 0-nak tekintettem.

A $p^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,332745 \\ 0,61216 \\ 0 \\ 0,285176 \end{pmatrix}$ fixpont esetében a Jacobi-mátrix:

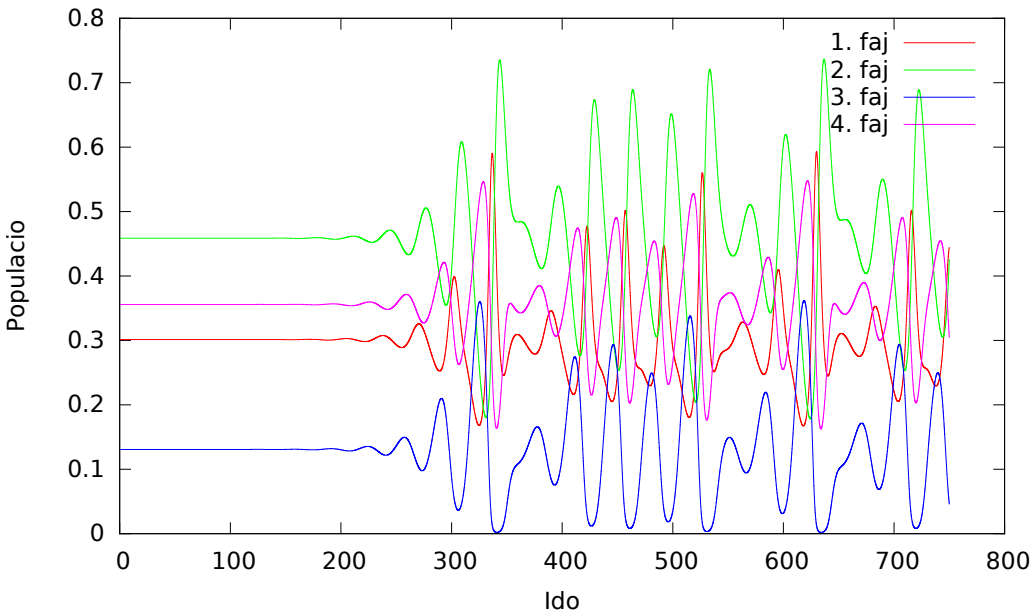
$$J = \begin{pmatrix} -0,3327 & -0,3626 & -0,5057 & 0 \\ 0 & -0,4468 & -0,1966 & -0,6077 \\ 0 & 0 & 0,1387 & 0 \\ -0,4382 & -0,1847 & -0,1267 & -0,3621 \end{pmatrix}$$

A sajátértékek: $\lambda_1 = -0,929615$, $\lambda_2 = 0,1387$, $\lambda_{3,4} = -0,105993 \pm 0,332214i$. Ezek alapján azt lehet mondani, hogy ennek a fixpontnak a környezetében a trajektória spirális pályán halad a fixpont felé.

A $p^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,301303 \\ 0,458655 \\ 0,0130765 \\ 0,35574 \end{pmatrix}$ fixpont esetében a Jacobi-mátrix:

$$J = \begin{pmatrix} -0,3013 & -0,3248 & -0,4579 & 0 \\ 0 & -0,3348 & -0,1473 & -0,4553 \\ -0,4661 & 0 & 0,2 & -0,094 \\ -0,5466 & -0,2304 & -0,1581 & -0,4517 \end{pmatrix}$$

A sajátértékek: $\lambda_1 = -1,03521$, $\lambda_2 = -0,334184$, $\lambda_{3,4} = 0,0407972 \pm 0,191551i$. Ezek alapján azt lehet mondani, hogy ennek a fixpontnak a környezetében a trajektória spirális pályán távolodik a fixponttól.



3. ábra. Az utoljára tárgyalt fixpontból indított megoldás

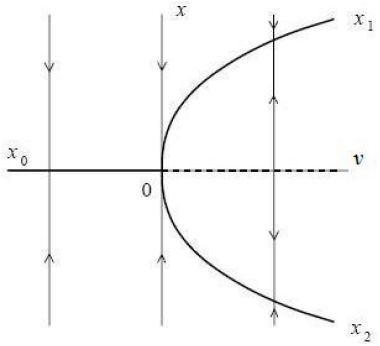
Ezen az ábrán a megoldást a fixpont közvetlen környezetéből indítottam. Gyönyörűen látszik, hogy nagyjából a 200. időpillanatig konstansok a populációk, megegyeznek a kezdeti feltételekkel. Ezután kezdődik egy kis oszcilláció, ami azért következik be, mert nem az egzakt fixpontot kaptuk meg a kiszámolás során, hanem a numerikus hiba miatt valamennyire eltért. Tehát a megoldás valójában nem a fixpontból indult, hanem valahonnan nagyon közelről mellőle. Ez a kis oszcilláció aztán felerősödik, kezdetben még egész szabályosan *(mint pl. egy csillapított oszcillátor esetében, csak itt nem csillapodik, hanem erősödik az oszcilláció)*, aztán ez az egész odáig fajul, hogy annyira eltávolodik a megoldás a fixponttól, ahol az alkalmazott lineáris közelítés már nem érvényes és a megoldás "átvált" egy szabálytalan, kaotikus oszcillációba.

3.2. Bifurkáció

Különböző rendszerek esetén érdekes *(és hasznos)* lehet végigkövetni, hogy bizonyos paraméter változtatása esetén hogyan változik adott fixpont "állapota". A paraméter változtatása mellett egy kritikus paraméterértéknél bizonyos fixpontok elveszíthetik a stabilitásukat, így új fixpontok keletkezhetnek. Vegyük például a

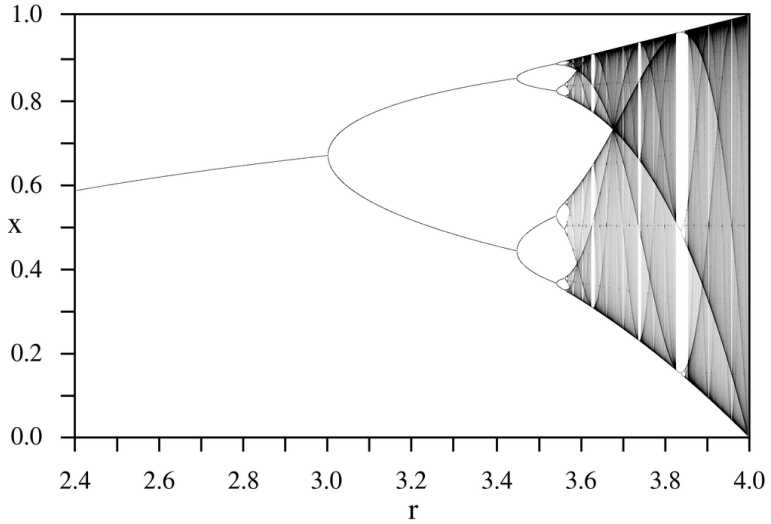
$$V(x) = \frac{-\mu x^2}{2} + \frac{\alpha x^4}{4}$$

potenciált. Tekintsük μ-t a fent említett változó paraméternek *(bifurkációs paraméter)*, majd határozzuk meg a rendszer fixpontjait μ különböző értékeinél. Ha ezeket a fixpontokat ábrázoljuk a bifurkációs paraméter függvényében, akkor egy vasvilla szerű ábrát kapunk *(Pitchfork bifurkáció)*. Perióduskettőző bifurkációnak



4. ábra. Vasvilla bifurkáció

nevezik azt a jelenséget, mikor az figyelhető meg, hogy ha az első kritikus bifurkációs paraméter érték elérése után tovább növeljük a paraméter értékét, a már jelenlevő kettes ciklus szétválik egyenként újabb kettőre, amik már csak az előzőnél egy rövidebb intervallumon stabilak. Ez jól megfigyelhető a következő ábra elején. Ha

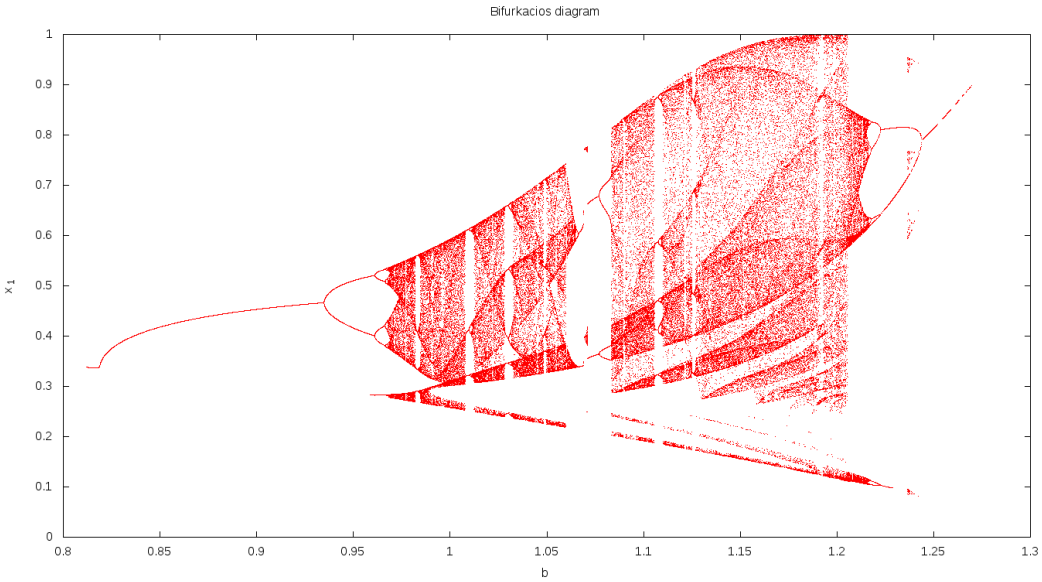


5. ábra. A logisztikus leképezés bifurkációs diagramja

tovább növeljük a paraméter értékét, akkor előbb-utóbb elérünk egy ún. *akkumulációs pontot*, ahol formálisan megjelenik egy 2^∞ hosszúságú periódus *(ez látható az ábra "sűrű" részén)*. Ez után a pont után a rendszer képes kaotikus viselkedést mutatni, hiszen ekkorra már végtelen sok, instabil periodikus pálya jött létre. Itt a mozgás véletlenszerű, egy kettes ciklus körüli kaotikus bolyongásnak tekinthető.
Fontos még szót ejteni az ún. Hopf bifurkációról. Hopf bifurkációnak nevezik azt a jelenséget, mikor egy stabil fixpont elveszti a stabilitását és a Jacobi-mátrix komplex konjugált sajátérték párjának képzetes része előjelet vált. Precízen:
Definició: Legyen J_0 egy folytonos paraméterű dinamikai rendszer Jacobi-mátrixa a rendszer Z_e fixpontjában kiértékelve. Tegyük fel, hogy J_0 minden sajátértékének valós része negatív, kivéve egy nem nulla, tisztán képzetes komplex konjugált párt, $\pm i\beta$ sajátértéket. Hopf bifurkáció történik, ha ez a két sajátérték előjelet vált a rendszer paramétereinek változása miatt.

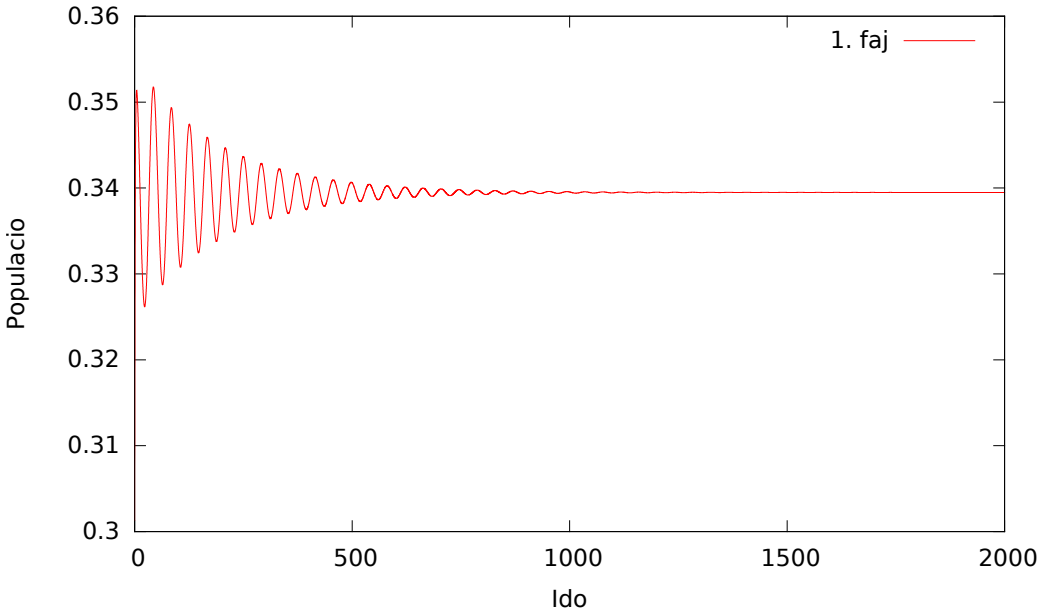
3.2.1. Bifurkációs diagram

A bifurkációs diagramot a differenciálegyenlet-rendszert megoldó program egy módosított változatával készítettem. Bifurkációs paramétereknek bevezettem egy b paramétert, ami a kooperációs mátrix nem diagonális elemeit szorozza. Ezzel gyakorlatilag a stabilitást a csatolás erősségének a függvényében vizsgáltam. Hiszen ha $b = 0$, akkor az egyenletek közötti csatolás megszűnik és a rendszer négy egymástól független, közönséges elsőrendű differenciálegyenletre esik szét. Jelen esetben az első faj populációinak maximumait vizsgáltam. Az eredmény a következő lett: A diagramon megfigyelhető, hogy nagyjából $b = 0,818$ környékén az eddig stabil

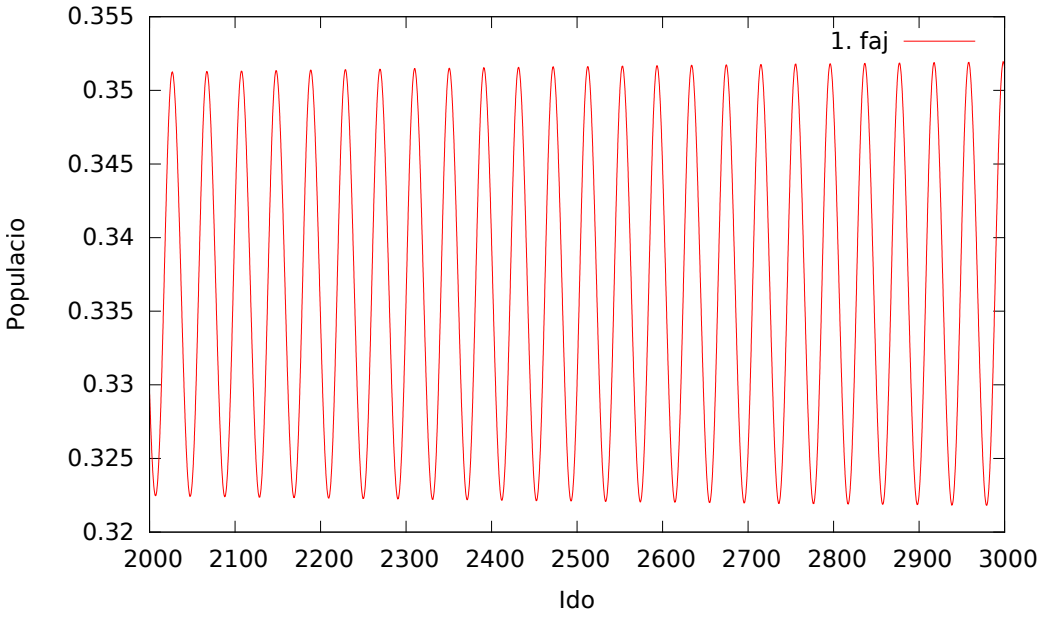


6. ábra. A rendszer bifurkációs diagramja

fixpont egy Hopf bifurkáción keresztül instabillá válik és a megoldás ráhúzódik egy határciklusra, amelynek az amplitúdója b további növelésével egy ideig növekszik. Ez látható a következő két ábrán. A két ábra közül elsőn a kezdeti időponttól ábrázoltam a megoldást, mivel egy egyenes vonal nem lett volna túl szemléletes. Itt a megoldás egy spirálisan vonzó pontattraktorba megy be, ahogy az látszik is. A második ábrán a megoldást a $[2000 : 3000]$ intervallumban ábrázoltam, azért, mert itt már lecsengettek a tranziensek, tehát a rendszer állandósult állapota látható, ami egy határciklus.

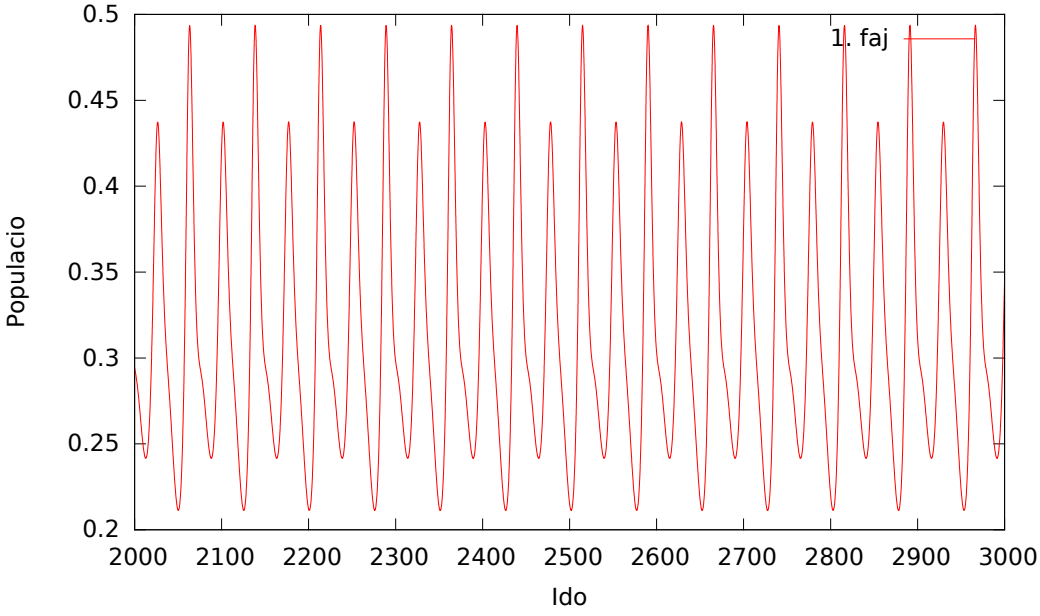


7. ábra. Az első faj populációja $b = 0,8$ értéknél



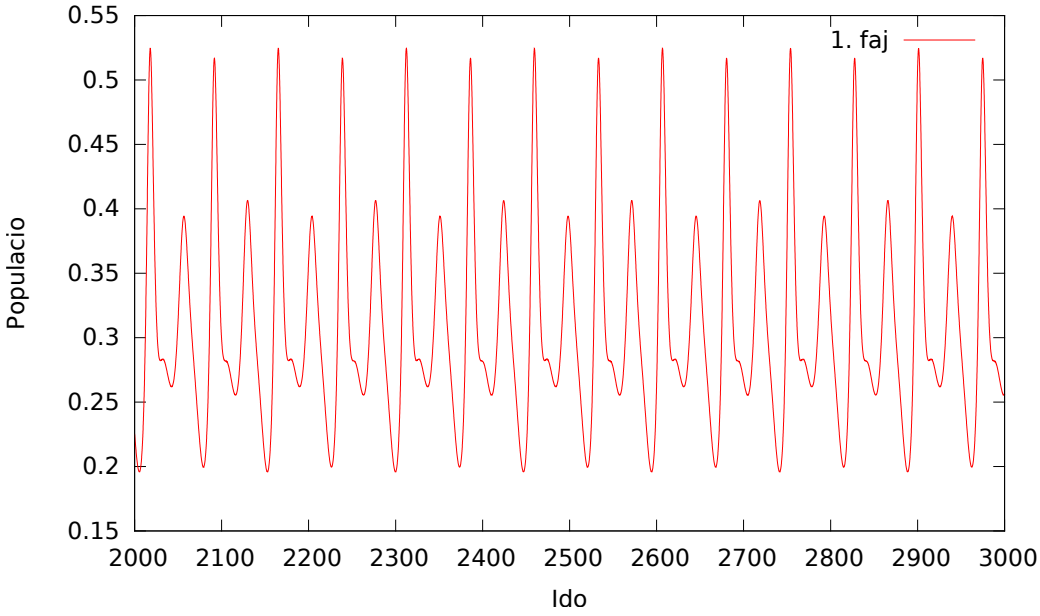
8. ábra. Az első faj populációja $b = 0,82$ értéknél

Tovább növelve a b értékét, $b = 0,94$ esetében látható *(és a diagramról is leolvasható)*, hogy történt egy perióduskettőződés. Itt két különböző amplitúdójú, de periodikus viselkedést mutat a rendszer.



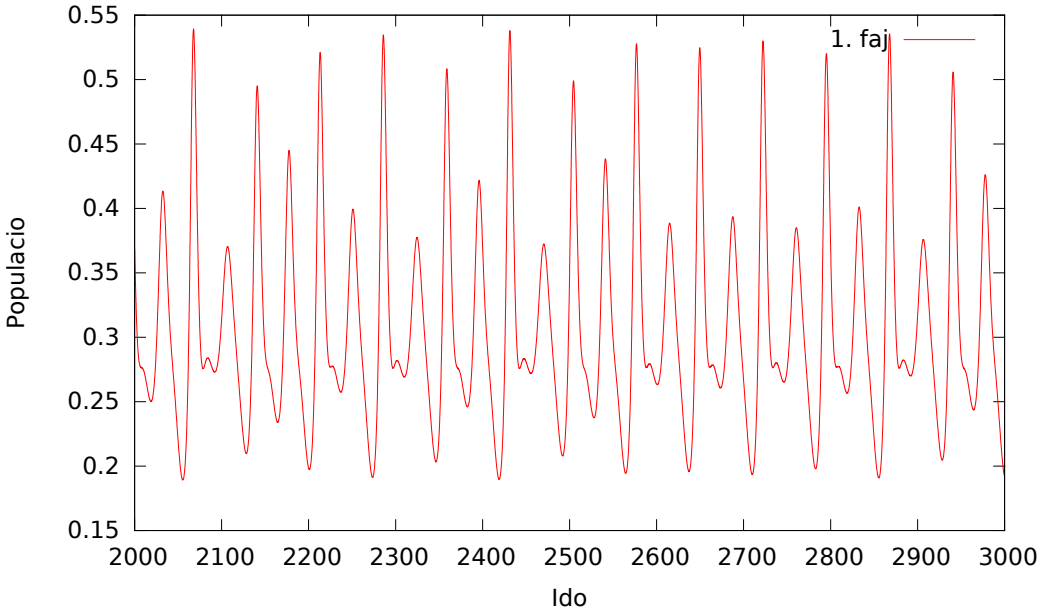
9. ábra. Az első faj populációja $b = 0,94$ értéknél

Ha még tovább növeljük a b-t, akkor ahogy a diagramon is látható, a már megkettőződött periódusok egyenként még egyszer megkettőződnek, így összességében egy négyes határciklus van a rendszerben. Ez $b = 0,9609$ körül történik meg. A jobb láthatóság kedvéért egy kicsit nagyobb b-nél ábrázoltam, ahol a szétválás már nagyobb mértékű. Megfigyelhető a fent említett kijelentés is, azaz, hogy a különböző perióduskettőződések egyre rövidebb "ideig" tartanak. Ezután ha jól felnagyítjuk az ábrát és jó a szemünk, akkor látható még egy perióduskettőződés, de ez már nagyon kicsi, úgyhogy nem kerestem meg, hogy milyen paraméterértéknél történik.

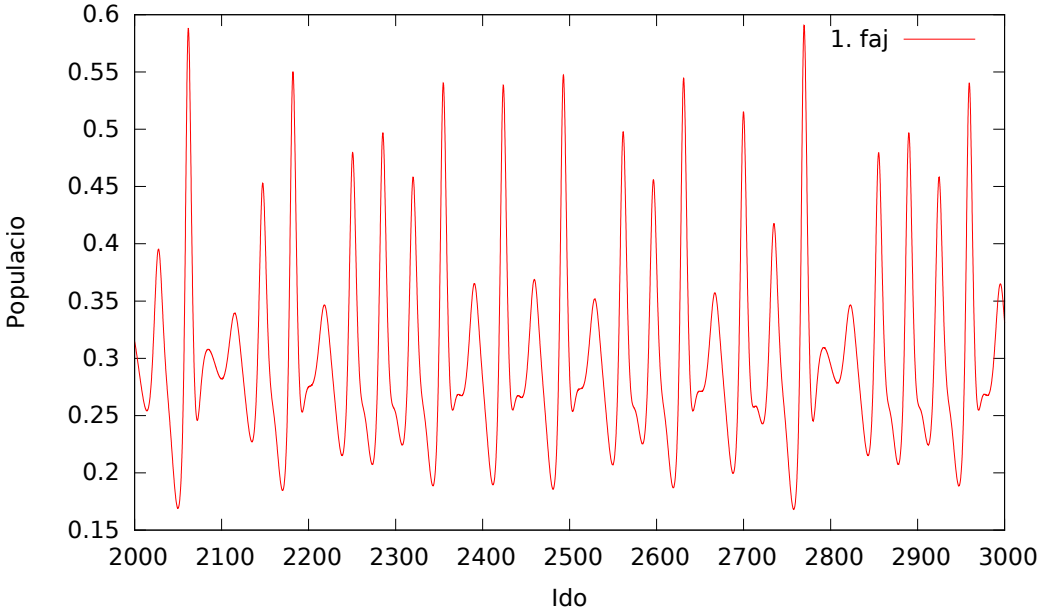


10. ábra. Az első faj populációja $b = 0,9615$ értéknél

A következő két ábra $b = 0,97$ és $b = 1$ értéknél készült. Az elsőn még valamennyire "szabályos" a formája a görbének, de már látható, hogy nem periodikus. Kezdjük elérni *(vagy már el is értük)* az akkumulációs pontot és a mozgás kezd kaotikussá válni. A $b = 1$ értéknél a megoldás a már fent közölt ábráknak egy későbbi időtartományban készült része. A diagramon látható, hogy a rendszer itt már rég elhagyta az akkumulációs pontot.

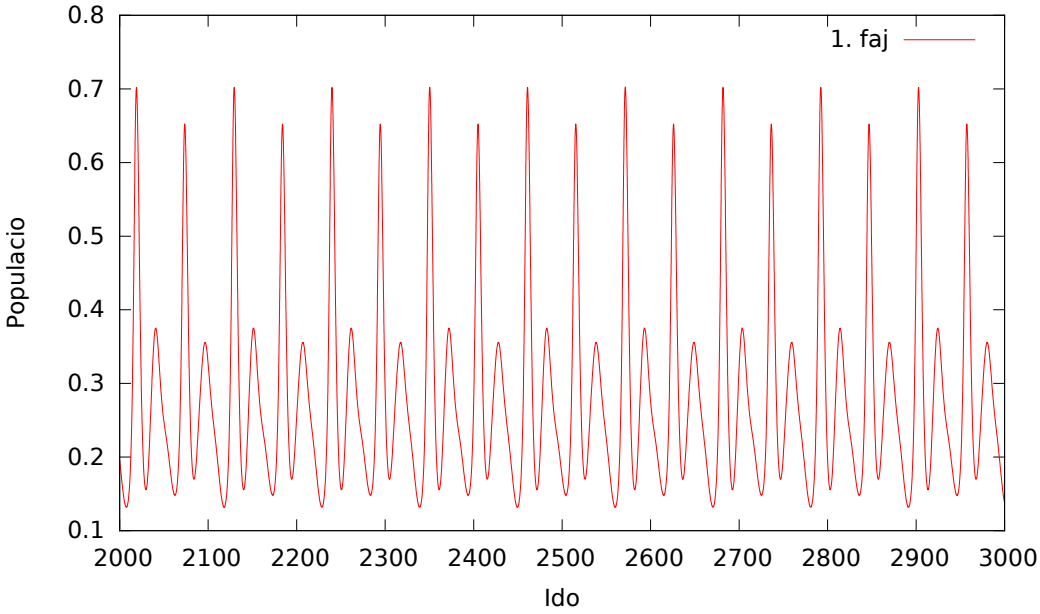


11. ábra. Az első faj populációja $b = 0,97$ értéknél



12. ábra. Az első faj populációja $b = 1$ értéknél

Ez az ábra pedig a diagramon látható középső, "üres" sávbeli viselkedést mutatja, $b = 1,08$ érték esetén. Itt visszaértünk egy újabb négyes határciklusra. Ha tovább növelnénk a paramétert, akkor újra kaotikus viselkedést tapasztalnánk, de erről már nem készítettem ábrát.



13. ábra. Az első faj populációja $b = 1,08$ értéknél

3.3. Az attraktorokról általában

Érdekes kérdés, hogy hogyan alakulhat ki a káosz, valamint miért számít ilyen sokat a mozgás milyenségében az, hogy milyen kezdőfeltétellel indítottuk el. Képzeljünk el egy ingát homogén gravitációs erőtérben, ami egy pl. falból kiálló rúdon foroghat körbe, valamint tekintsünk el a különböző disszipatív erőktől, mint a súrlódás vagy a légellenállás.
Indítsuk el az ingát olyan kezdeti feltételekkel, hogy az a mozgása során "fejtetőn" álljon meg egy instabil helyzetében. Ilyenkor az inga nyugalomban van, de bármilyen kis perturbáció kilöki ebből a helyzetéből és tovább mozog.
Indítsuk most ugyan azokkal a kezdeti feltételekkel, de az egyikhez *(a kezdeti kitéréshez vagy a sebességhez)*

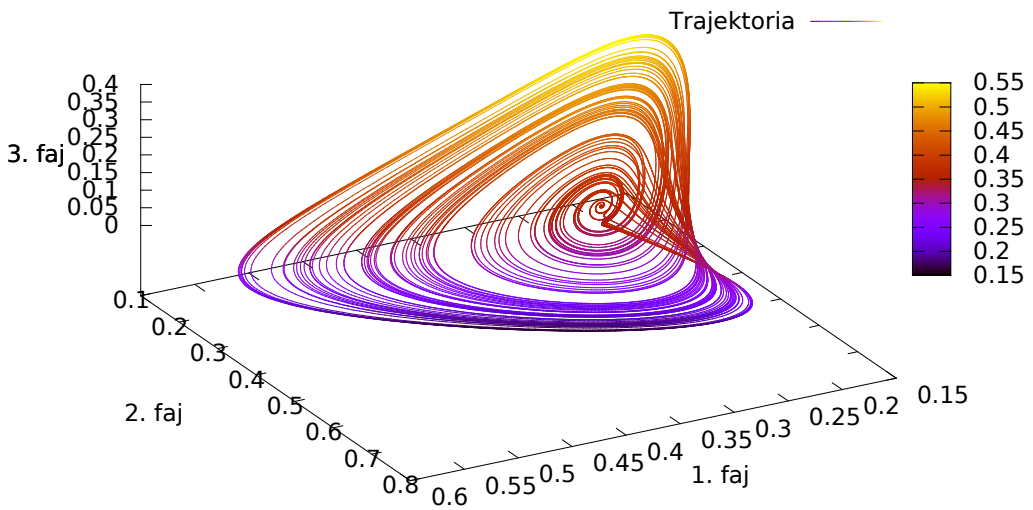
adjunk hozzá egy nagyon kicsi ϵ nagyságú eltérést. Ez később ahhoz az eredményhez vezet, hogy az inga nem fog a felső instabil helyzetben megállni, hanem átfordul azon és tovább mozog.
Ettől a ponttól már nem mondhatjuk azt, hogy a két mozgás pályája csak nagyon kicsit fog eltérni egymástól, annak ellenére, hogy csak egy ϵ nagyságú perturbációt adtunk a kezdőfeltételeknek. A káosz és az előrejelezhetetlenség oka tehát tekinthető úgy, hogy a rendszer sorozatosan instabil egyensúlyi helyzeteken halad keresztül.
A szabálytalan mozgásban rejlő szabályszerűségek úgy is láthatóvá tehetők, hogy a mozgást hosszú ideig követjük és megnézzük, hogy mi történik a fázistérben. Bármilyen kezdőfeltétellel is indítunk egy rendszert, ha hosszú idő után valamilyen állandósult mozgáshoz tart, akkor ezt az objektumot attraktornak nevezzük.
Az állandósult állapot milyensége alapján az attraktorokat megkülönböztethetjük. A szabályos mozgásoknak, vagy a mozgások leállásának határciklus attraktorok, illetve pontattraktorok felelnek meg. Ha azonban a rendszerünk nem lineáris *(ha nem alkalmazunk közelítéseket, akkor az esetek nagy részében nem az)*, akkor megnyilvánul a rendszer kaotikussága és a mozgás szabálytalansága. Ilyenkor a fázistérben található attraktor általában gyönyörű fraktálszerkezetet mutat és a trajektória valamilyen jól meghatározott *(de függvényekkel általában nem leírható)* "formára húzódik" rá a mozgás szabálytalansága ellenére. A jelenlegi rendszernél is ilyet fogunk látni.

3.3.1. Az attraktorok típusai

Fixpont attraktor Alapvetően fixpontnak nevezik a különböző leképezések vagy transzformációk olyan pontjait, amik a leképezés vagy transzformáció után önmagukba képződnek le. Ha egy rendszer időfejlődését transzformációk sorozatának tekintjük, akkor szintén található *(vagy nem)* ilyen fixpont, ami a fontos hatással lehet a rendszer időfejlődésére. Ilyen fordulhat elő például egy csillapított oszcillátornál, hiszen ilyenkor egy stabil állapotba *(megáll)* érkezik a rendszer egy idő után. A csillapított oszcillátor esetén egy vonzó spirális attraktorunk van, mivel ha megvizsgáljuk a rendszer fázisterét, akkor egy logaritmikus spirált látunk a fixpont körül. A vizsgált rendszer egyik fixpontja is ilyen ahogy azt fent már említettem.

Határciklus Határciklus akkor jön létre, ha magára hagyunk egy csillapítatlan, nem gerjesztett rendszert. Ilyenkor egy teljesen szabályos periodikus mozgás jön létre, amely a fázistérben egy ellipszisként vagy körként jelenik meg. Ilyen például a csillapítatlan harmonikus oszcillátor esetén fordul elő. Ilyenkor két dimenzióban a Jacobi-mátrix sajátértékei tisztán képzetesek *(az ilyen fixpontot gyakran nevezik centrumnak is)*.

Különös attraktor Ez az attraktor a nevét onnan kapta, hogy a szerkezete fraktálszerű. Leggyakrabban kaotikus rendszerek esetén fordulnak elő *(pl. jelen esetben, vagy a közismert Lorenz-attraktor, amely egy atmoszférikus áramlást leíró modellhez tartozó attraktor)*, de léteznek nemkaotikus különös attraktorok is. Az ilyen attraktorral rendelkező rendszerek lokálisan instabilak, de globálisan stabilak. Azaz ha különböző pontokat vizsgálunk, azok egymástól eltávolodhatnak, de végig az attraktoron maradnak. A most vizsgált rendszer attraktora szerintem különösen szép és a következő ábrán látható.



14. ábra. Fázistérbeli trajektória

4. Összegzést

Ennek a tulajdonságait lehetne még tovább vizsgálni, például a komplexitás jellemzésére szokás kiszámolni az attraktor fraktáldimenzióját, illetve a viselkedés előrejelezhetetlenségének mérésére az ún. Ljapunov-exponenst, de ezek sajnos mind olyan problémák, melyek numerikus vizsgálata az én jelenlegi tudásomat meghaladják, valamint messzire vinnének az eredetileg tárgyalt témától *(amitől már így is elég messze vetődtünk)*, azaz négy faj egy közös erőforrásért versengésének leírásától.
Bár ezen írásomban sajnos nem sok hely jutott a különböző populációdinamikai gondolatok boncolgatására, hiszen végig numerikus vizsgálatokról, kaotikus dinamikáról és stabilitásvizsgálatról beszéltem, de remélhetőleg jól példázza a téma szerteágazását, amit a bevezetőben is írtam. Hiszen alapvetően egy együttélési problémából indultam ki, amiből aztán eljutottam a fizikának egy nagyon szép és érdekes területére, amely terület eredményeit felhasználtam egy nem fizikai rendszer vizsgálatára.

Hivatkozások

[1] Wikipedia: Competitive Lotka-Volterra equations

[2] Populációdinamika blog

[3] Meszéna Géza "Elméleti evolúcióbiológia" kurzusa

[4] Györgyi Géza "Elméleti mechanika A" kurzusa

[5] Tél Tamás-Gruiz Márton: Kaotikus Dinamika