Biofizika, dinamika

Meszéna Géza

Exponenciális növekedés

egyenes „d”: deriválás

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = B - D = bN - dN = rN$$

ahol $r = b - d$

születések halálozások

rátája

fejenkénti ráták

fejenkénti Növekedési ráta

Ráta=$\frac{\#esemény}{\Delta t}$

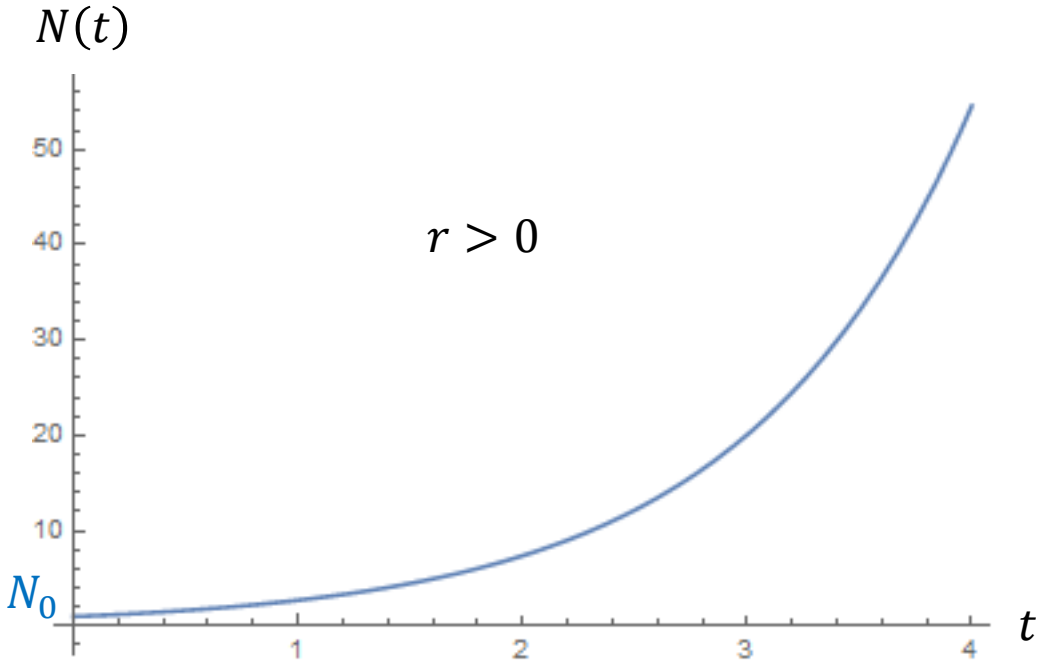
A differenciálegyenlet megoldása, ha $r =$ áll.:

$$N(t) = N_0 e^{rt} \qquad (N(0) = N_0)$$

Ellenőrzés:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N_0 e^{rt} r = rN$$

$e = 2{,}718\ldots$



Valójában nem mehet így a végtelenségig!

Exponenciális csökkenés, halálozás, (radioaktív) bomlás

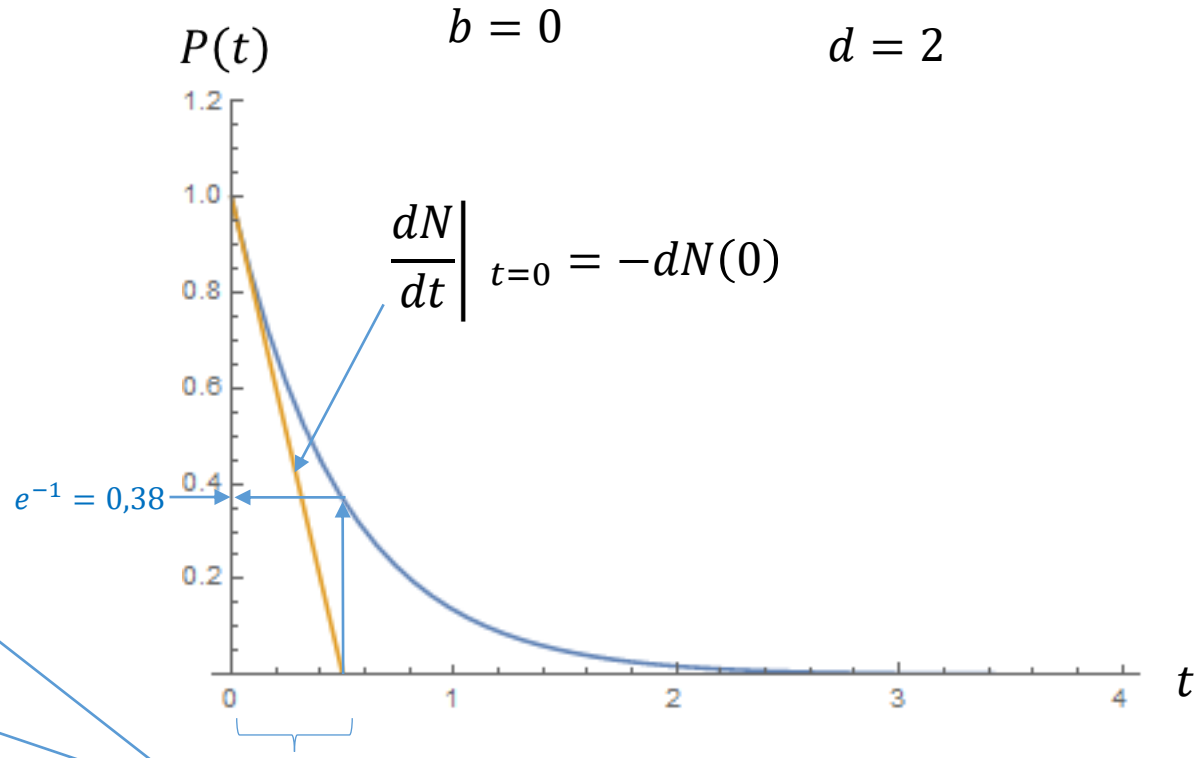
$b < d \Rightarrow r < 0$

Például:

$b = 0 \qquad r = -d$

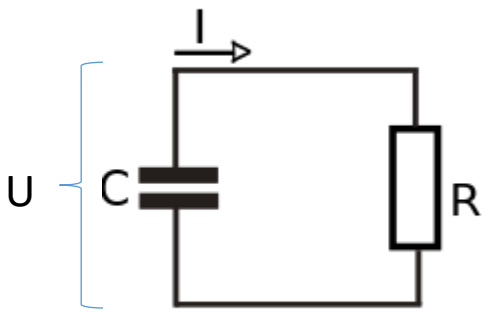
$$N(t) = N_0 e^{-dt} = N_0 e^{-t/\tau}$$

$$P(t) = \frac{N(t)}{N_0} = e^{-dt} = e^{-t/\tau}$$



$\tau = 1/d$ ← átlagos élettartam

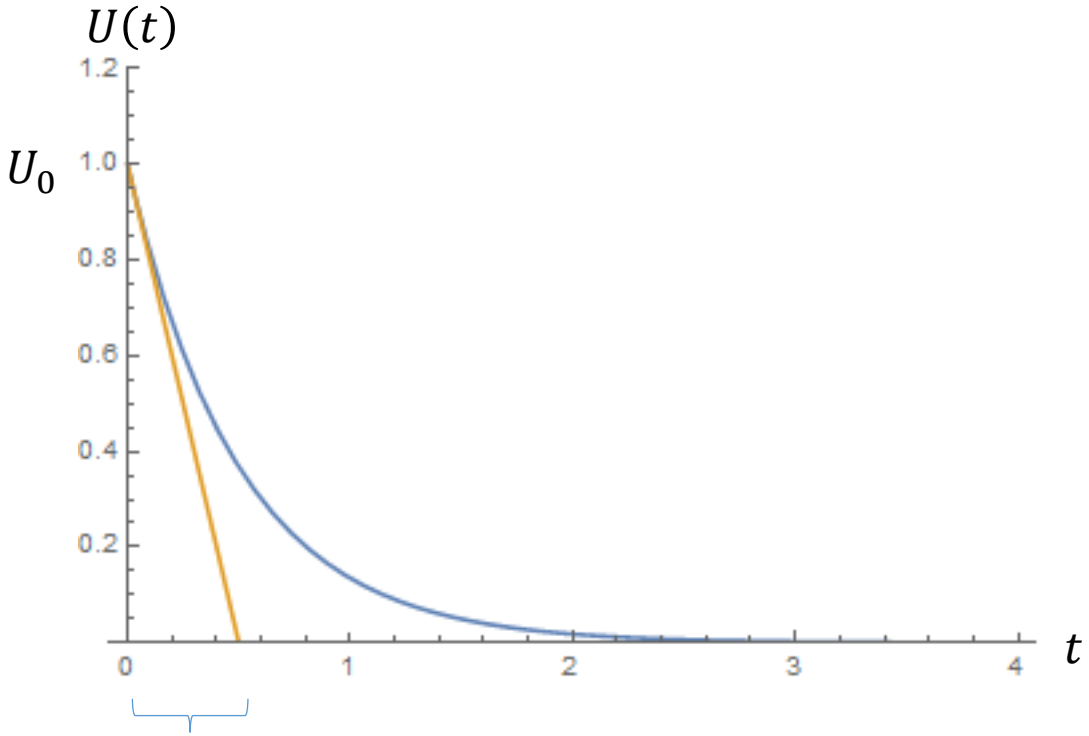
Kisülő kondenzátor: RC időállandó



Ohm törvény

$$\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{C}I(t) = -\frac{1}{C}\frac{U(t)}{R} = -\frac{U(t)}{RC} = -\frac{U(t)}{\tau}$$

$$U(t) = U_0 e^{-t/RC} = U_0 e^{-t/\tau}$$



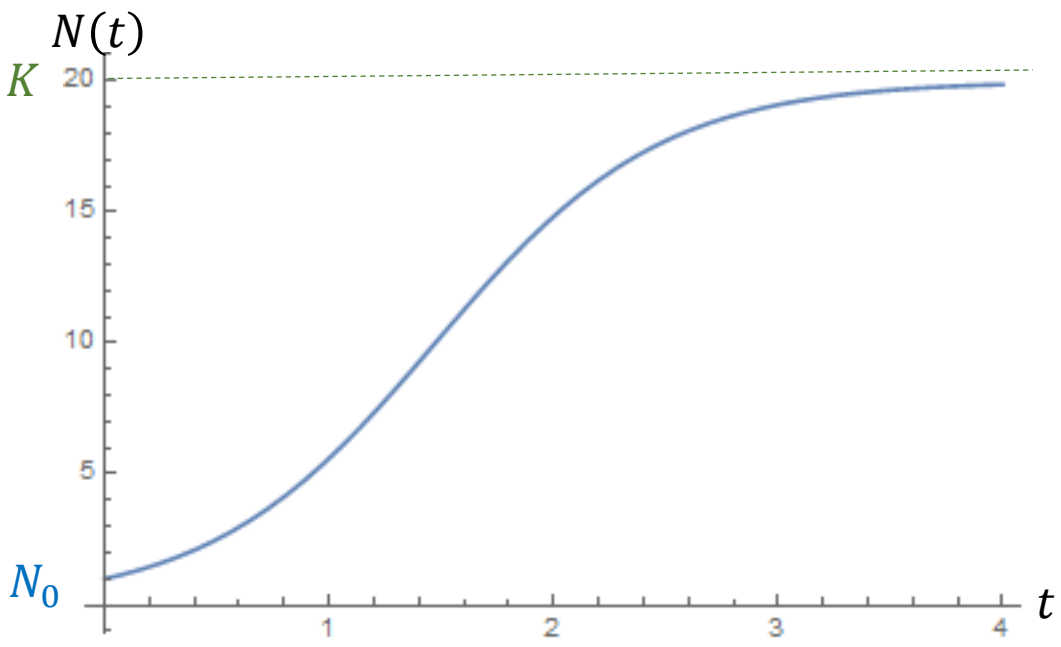
Relaxáció, egyensúlyhoz közeledés jellemzően ilyen!

Logisztikus növekedés

feltesszük: $r(N) = (r_0 - aN)$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r(N)N = (r_0 - aN)N = r_0 N - aN^2 = r_0\left(1 - \frac{N}{K}\right)N$$

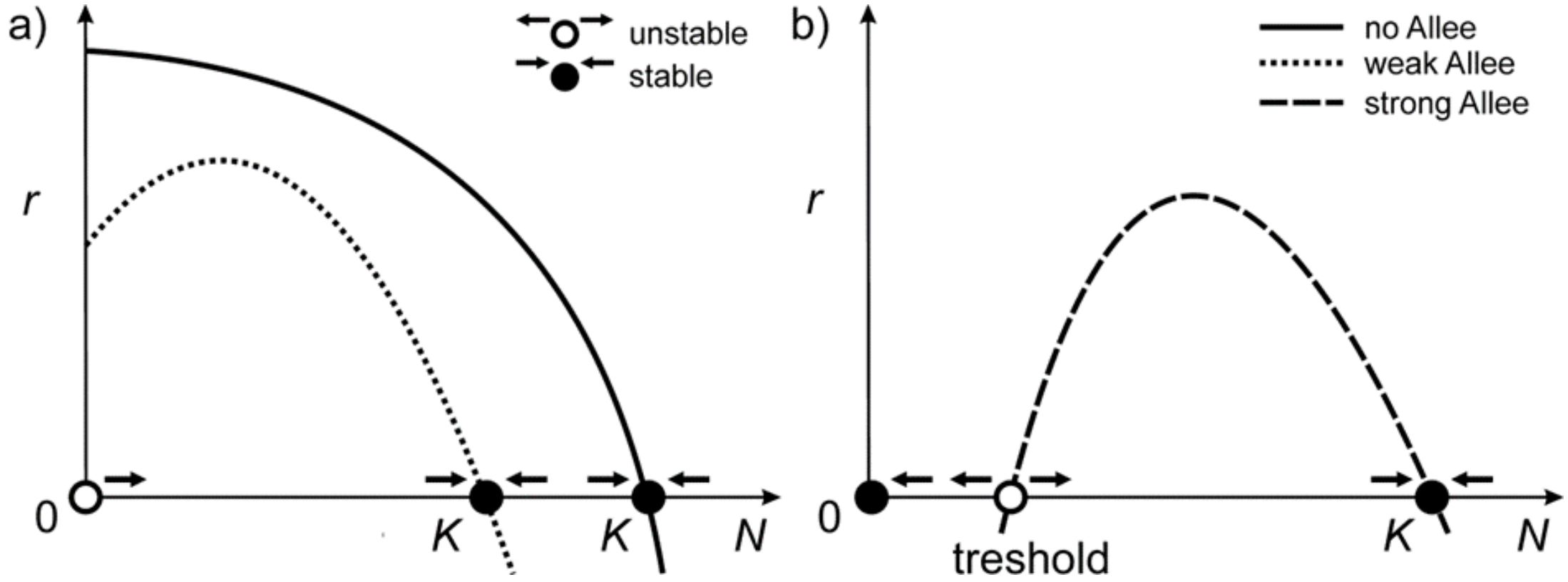
Egyensúlyi egyedszám: $K = \dfrac{r_0}{a}$



Megoldás (ellenőrizd le!):

$$N(t) = \frac{KN_0 e^{r_0 t}}{K + N_0(e^{r_0 t} - 1)} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-r_0 t}} = \begin{cases} N_0 e^{r_0 t}, & t \text{ kicsi} \\ K, & t \to \infty \end{cases}$$

Alle hatás



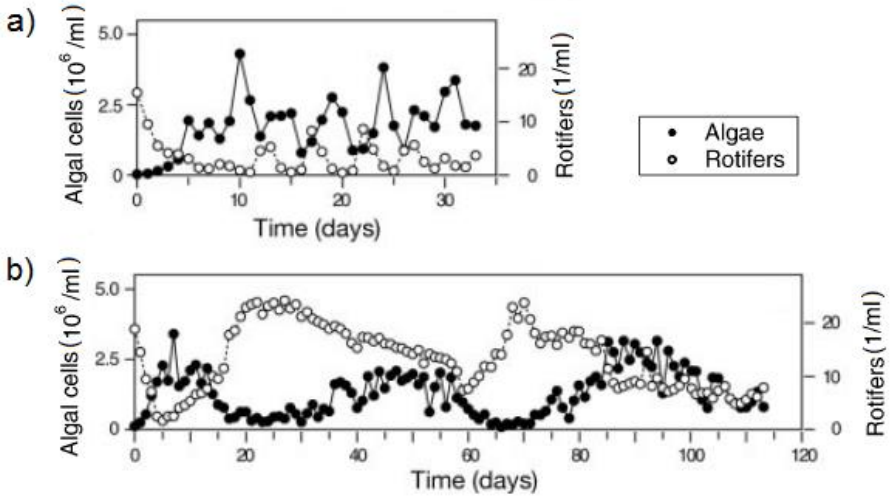
Egy dimenziós folytonos dinamika mindig olyan, hogy stabil és instabil fixpontok felváltva helyezkednek el!

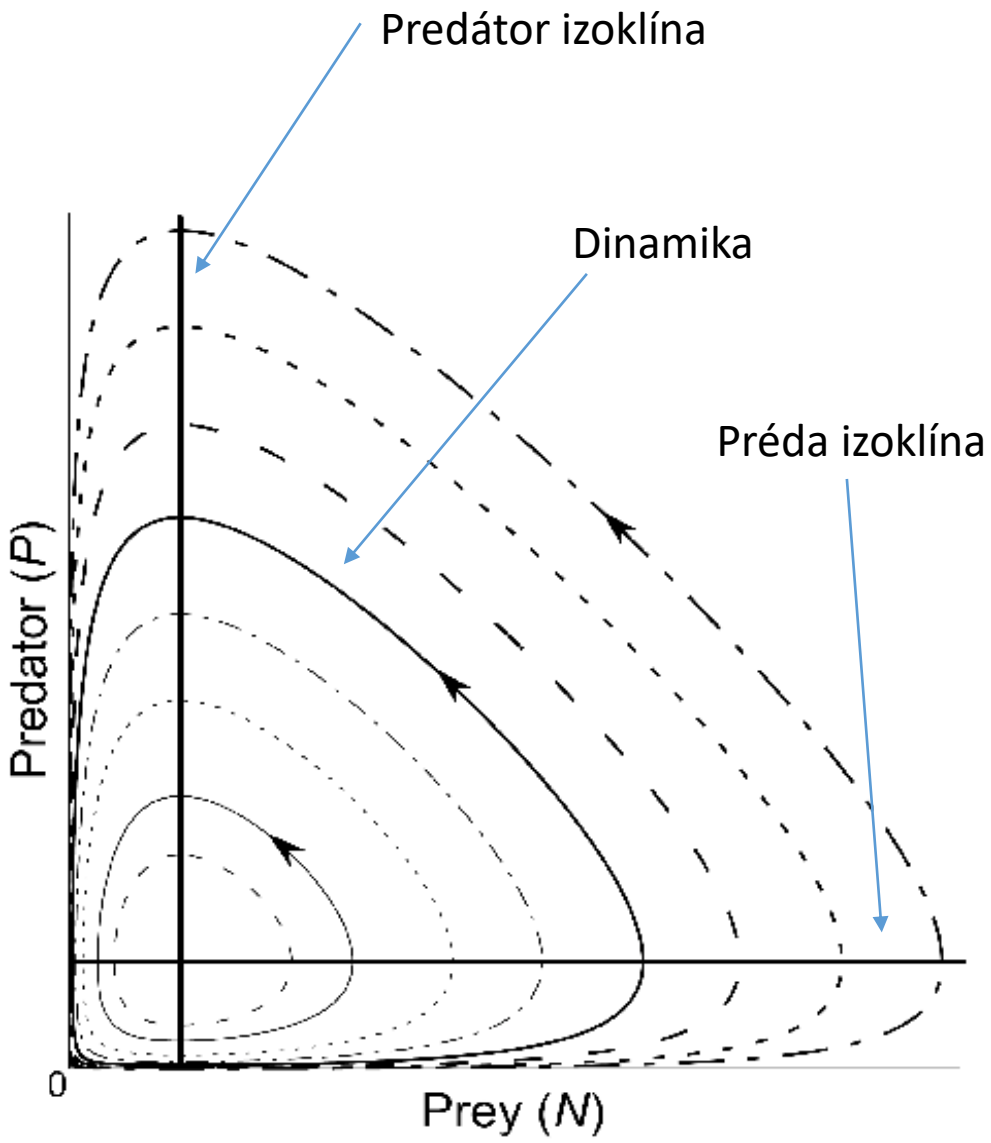
Lotka-Volterra préda-predátor modell

$$\frac{dN}{dt} = (a - bP)N$$

$$\frac{dP}{dt} = (-c + dN)P$$

Valóságban:





Funkcionális válasz: táplálékfelvétel

Holling I

táplálék felvétel

$$\rho(R) = \beta R$$

táplálék koncentráció

Holling II

handlig time

$$\rho(R) = \frac{\beta R}{1 + \beta R T_h} = \rho_{\max} \frac{R}{k + R} = \begin{cases} \beta R, & \text{ha } R \ll k \\ \rho_{\max}, & \text{ha } R \gg k \end{cases}$$

(telítődés)
(lsd. Michaelis-Menten kinetika)

ahol

$$\rho_{\max} = \frac{1}{T_h}, \qquad k = \frac{1}{\beta T_h}$$

Magyarázat:
Egységnyi keresési idő során talál βR számú táplálékot, és mindegyikkel T_h ideig foglalkozik.
Így βR számú táplálék megszerzésére összesen $1 + \beta R T_h$ időt fordít.

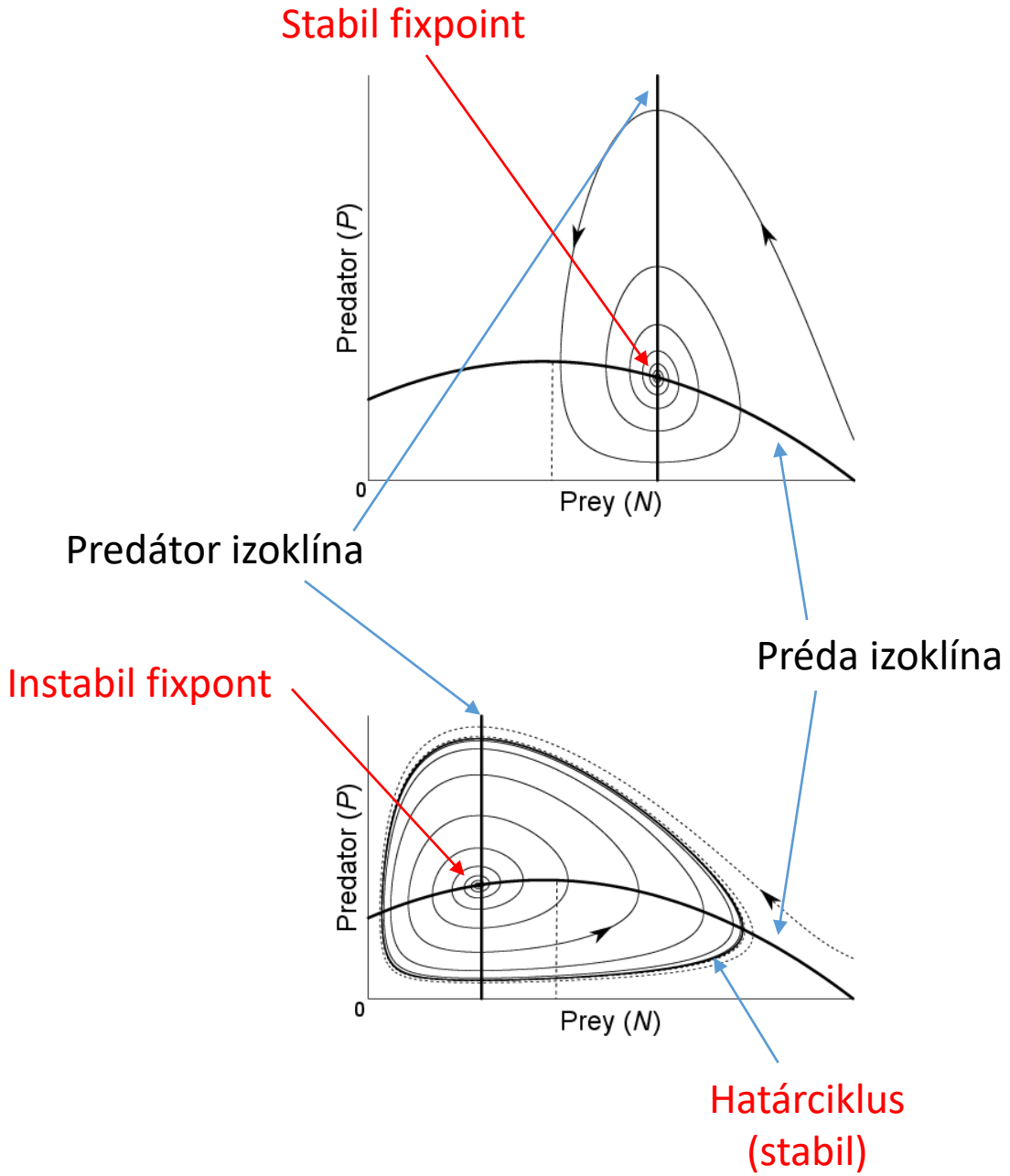
McArthur-Rosenzweig modell

stabilizál

destabilizál

Préda:
$$\frac{dN}{dt} = r_0\left(1 - \frac{N}{K}\right)N - \rho_{\max}\frac{N}{k+N}P$$

Predátor:
$$\frac{dP}{dt} = \left(\gamma\rho_{\max}\frac{N}{k+N} - u\right)P$$



Meglepő: *K* növelése destabilizál (paradox of enrichment)

Két dimenziós folytonos dinamában (stabil, vagy instabil) határciklus is előfordulhat!

Kaotikus dinamika

Káosz 4 dimenzióban, kettős inga:
https://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum

Káosz 3 dimenzióban, Lorentz attraktor (időjárás):
https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system

Attraktorok:

- Fix pont
- Határciklus
- Kaotikus (strange) attraktor

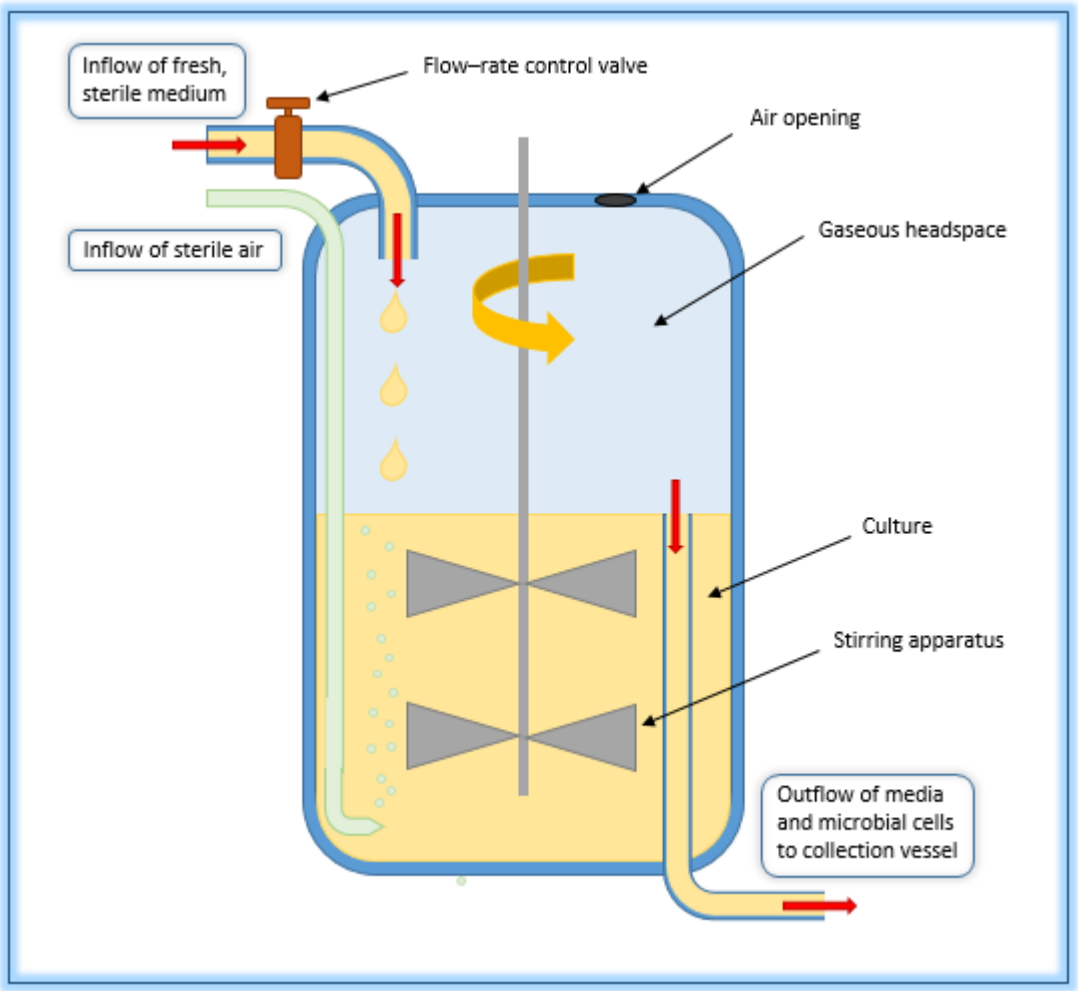
Káosz diszkrét idejű 1 dimenzós dinamikban:
Diszkrét logisztikus populációnövekedés

$$N_{t+1} = \lambda_0 \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) N_t$$

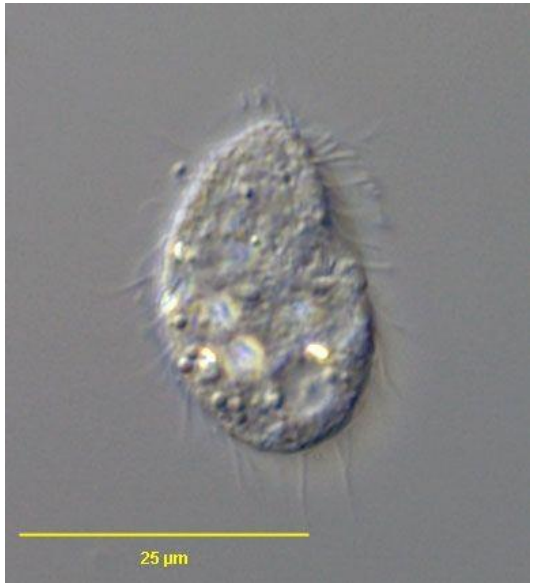
https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map

$$N_{t+1} = \lambda_0 \, N_t$$

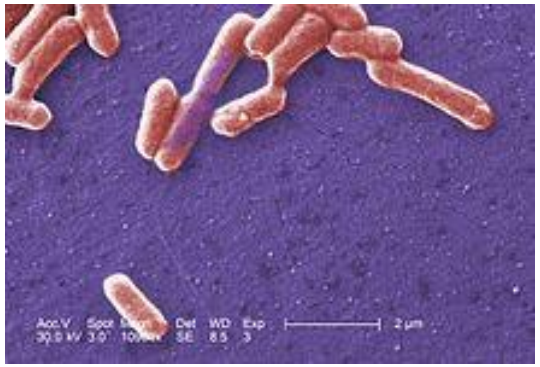
Ki jár jól a több cukorral?



Colpoda steinii



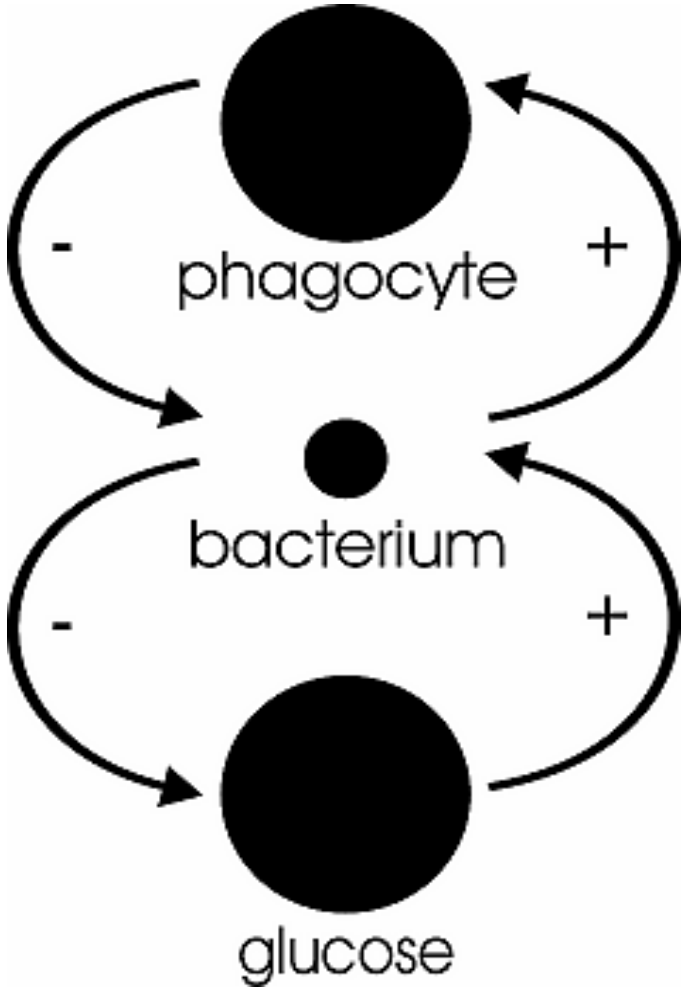
E. coli

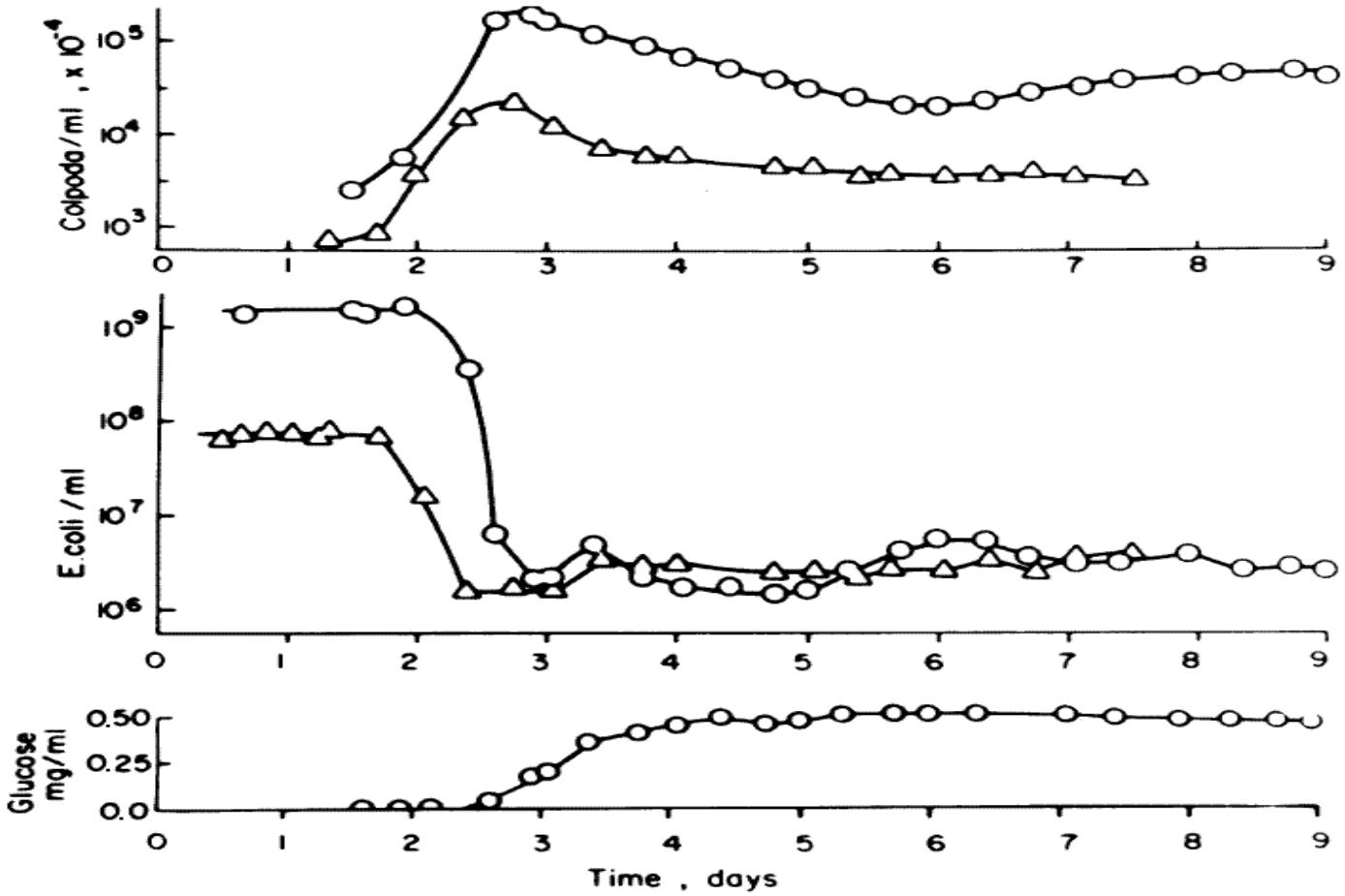


Kóli baci cukrot eszik.
Colpoda kólit eszik.

Ki jár jól, ha több lesz a cukor?

Ki jár jól a több cukorral?





Szervetlen forrás

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = i - \alpha R = \alpha\left(\hat{R} - R\right)$$

forrás dinamikája

$$\hat{R} = \frac{i}{\alpha}$$

forrás terheletlen egyensúlya

$$\frac{\mathrm{d}\left(R - \hat{R}\right)}{\mathrm{d}t} = -\alpha\left(R - \hat{R}\right)$$

$$R(t) - \hat{R} = \left(R(0) - \hat{R}\right)e^{-\alpha t}$$

Forrás + fogyasztó

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \alpha\left(\hat{R} - R\right) - \beta^{\mathrm{N}} R N$$

forrás dinamikája

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \left(\gamma^{\mathrm{N}} \beta^{\mathrm{N}} R - u^{\mathrm{N}}\right) N$$

fogyasztó dinamikája

$$R^* = \frac{u^{\mathrm{N}}}{\gamma^{\mathrm{N}} \beta^{\mathrm{N}}}$$

fogyasztó egyensúlyi forráskoncentrációja

$$\alpha\left(\hat{R} - R^*\right) = \beta^{\mathrm{N}} R^* N^{\mathrm{e}} \Longrightarrow N^{\mathrm{e}} = \frac{\alpha}{\beta^{\mathrm{N}}} \frac{\hat{R} - R^*}{R^*}$$

forrás terhelt egyensúlyi pontja

A fogyasztó egyensúlyi létszáma $\hat{R} - R^*$-vel arányos.

Forrás + 2 trofikus szint

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \alpha(\hat{R} - R) - \beta^{\mathrm{N}} R N$$ szervetlen forrás

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = (\gamma^{\mathrm{N}}\beta^{\mathrm{N}} R - u^{\mathrm{N}})N - \beta^{\mathrm{P}} N P$$ préda

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = (\gamma^{\mathrm{P}}\beta^{\mathrm{P}} N - u^{\mathrm{P}})P$$ predátor

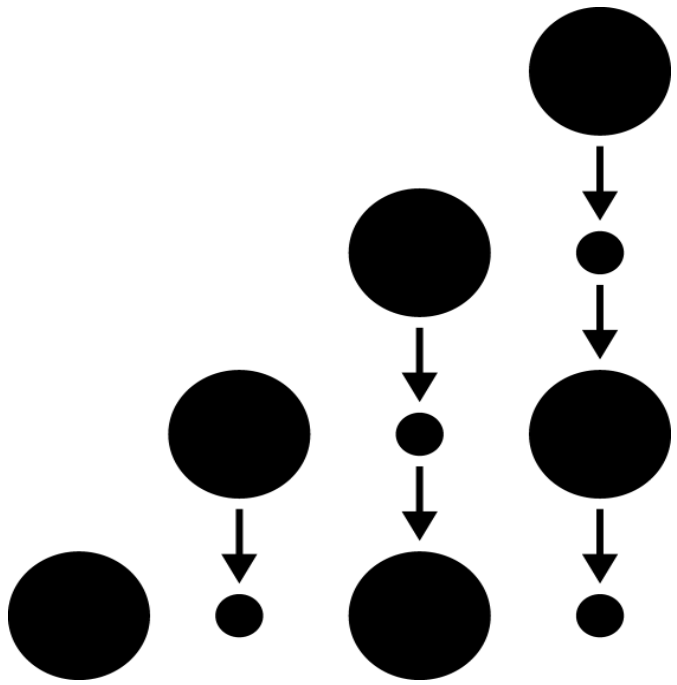
$$N^* = \frac{u^{\mathrm{P}}}{\gamma^{\mathrm{P}}\beta^{\mathrm{P}}}$$ predátor „R^*”

$$R^{\mathrm{e}} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta^{\mathrm{N}} N^*}\hat{R}$$ forrás terhelt egyensúlyi pontja

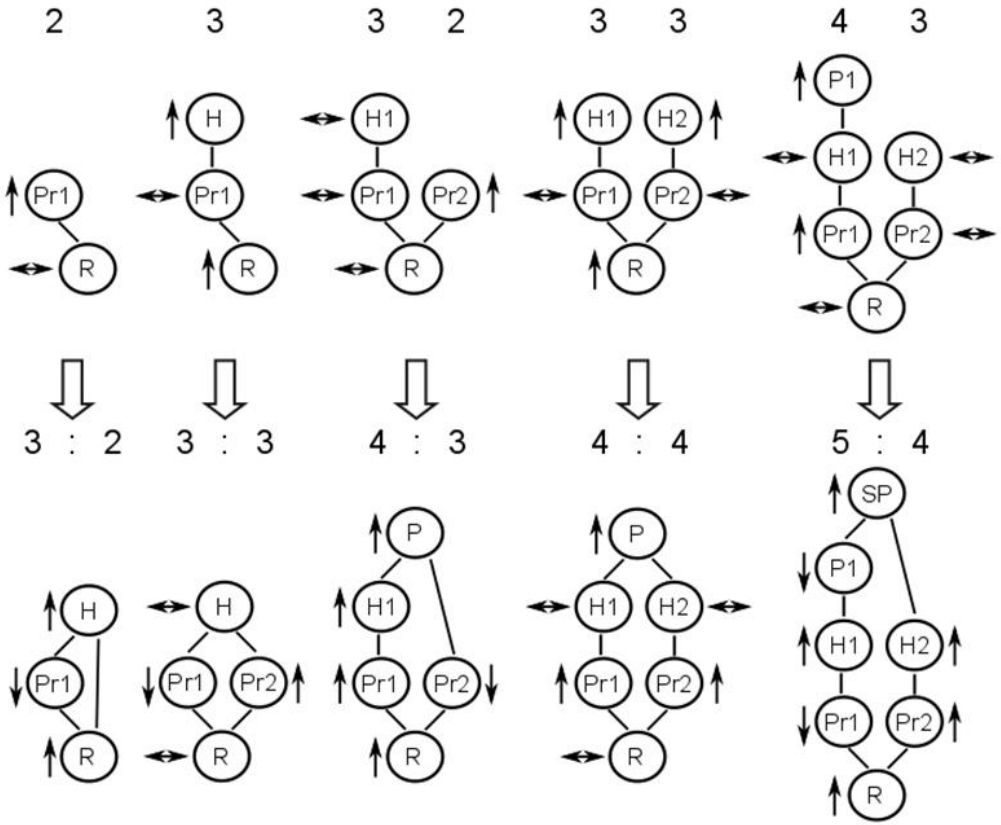
$$P^{\mathrm{e}} = \frac{\gamma^{\mathrm{N}}\beta^{\mathrm{N}} R^{\mathrm{e}} - u^{\mathrm{N}}}{\beta^{P}}$$ predátor egyensúlyi pontja

Növekvő $\hat{R}$ növeli R^{e}-t és P^{e}-t, de változatlanul hagyja N^*-ot!

Egyre hosszabb láncok…



Scheffer 1999



Wollrab et al. 2012

A legegyszerűbb járványtani modell: SIR

(Pl. senki sem hal meg, nincs előzetes immunitás, stb.)

Susceptible: $$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\frac{\beta I S}{N}$$

Infected: $$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta I S}{N} - \gamma I = \gamma\left(\underbrace{\frac{S}{N}\mathcal{R}_0}_{\mathcal{R}} - 1\right) I$$

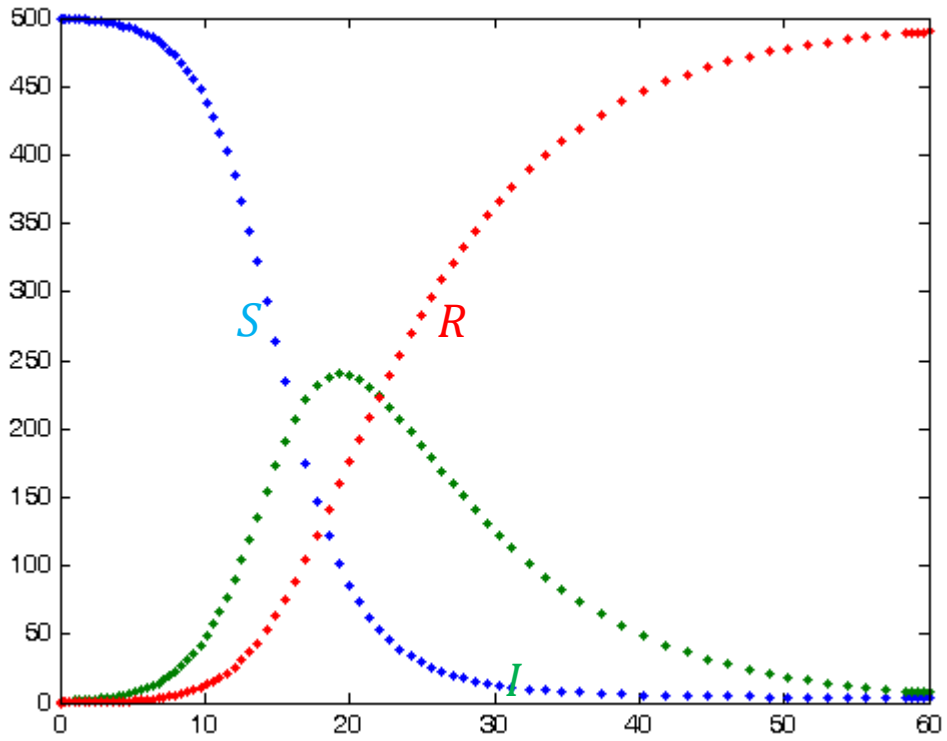
Resistent: $$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I$$

$N = S + I + R =$áll., mert

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = 0$$

$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma}$: egy fertőzött hány másik embert fertőz meg a járvány elején?

$\mathcal{R} = \frac{S}{N}\mathcal{R}_0$: egy fertőzött hány másik embert fertőz meg (bármikor)?



Járvány kitörésének feltétele: $\mathcal{R}_0 > 1$

Járvány terjed: $\mathcal{R} > 1$

Járványterjedés vége: $\frac{S}{N} = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$

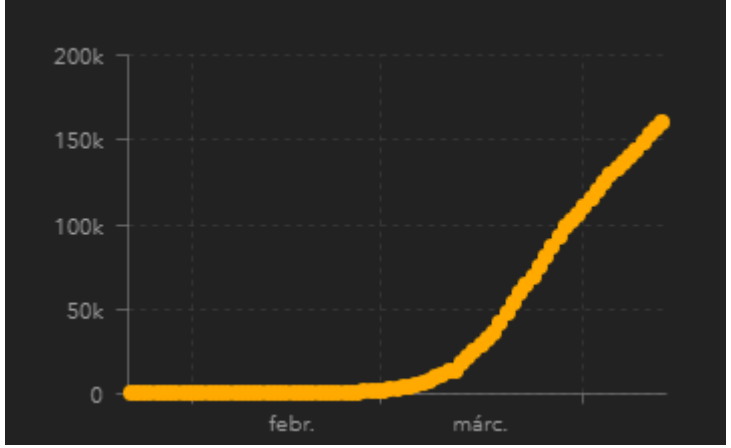
COVID-19:

$\mathcal{R}_0 \sim 2.5$ ⟹ $\frac{S}{N} \sim 0.4$

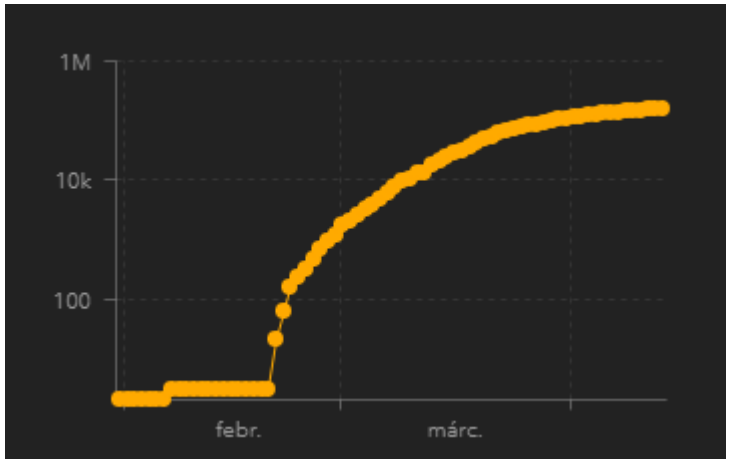
Brit mutáns → $\mathcal{R}_0 \sim 4$ ⟹ $\frac{S}{N} \sim 0.25$

Olaszország

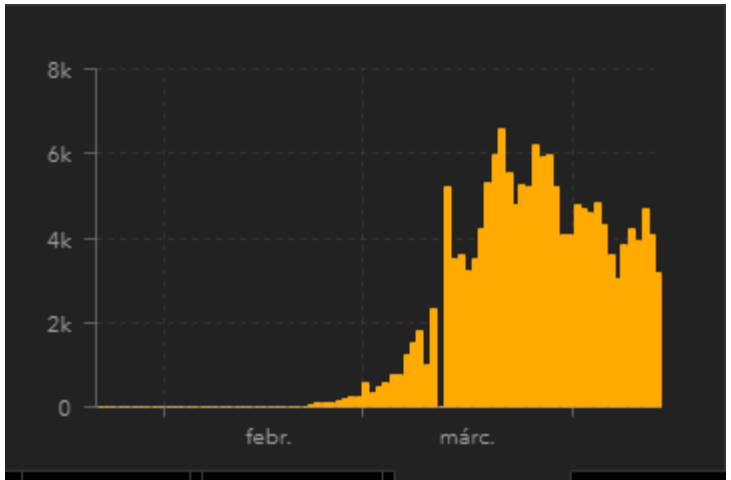
(2020.04.14.)



Kumulált esetszám



Kumulált esetszám
log skálán



Napi új esetszám

A járvány lelassulása NEM
a SIR-model-beli telítődés,
mert nagyon messze vagyunk
a nyájimmunitás kialakulásától!

A lelassulás a kijárási
korlátozások következménye!

https://coronavirus.jhu.edu/map.html

Leopoldina
Nationale Akademie
der Wissenschaften

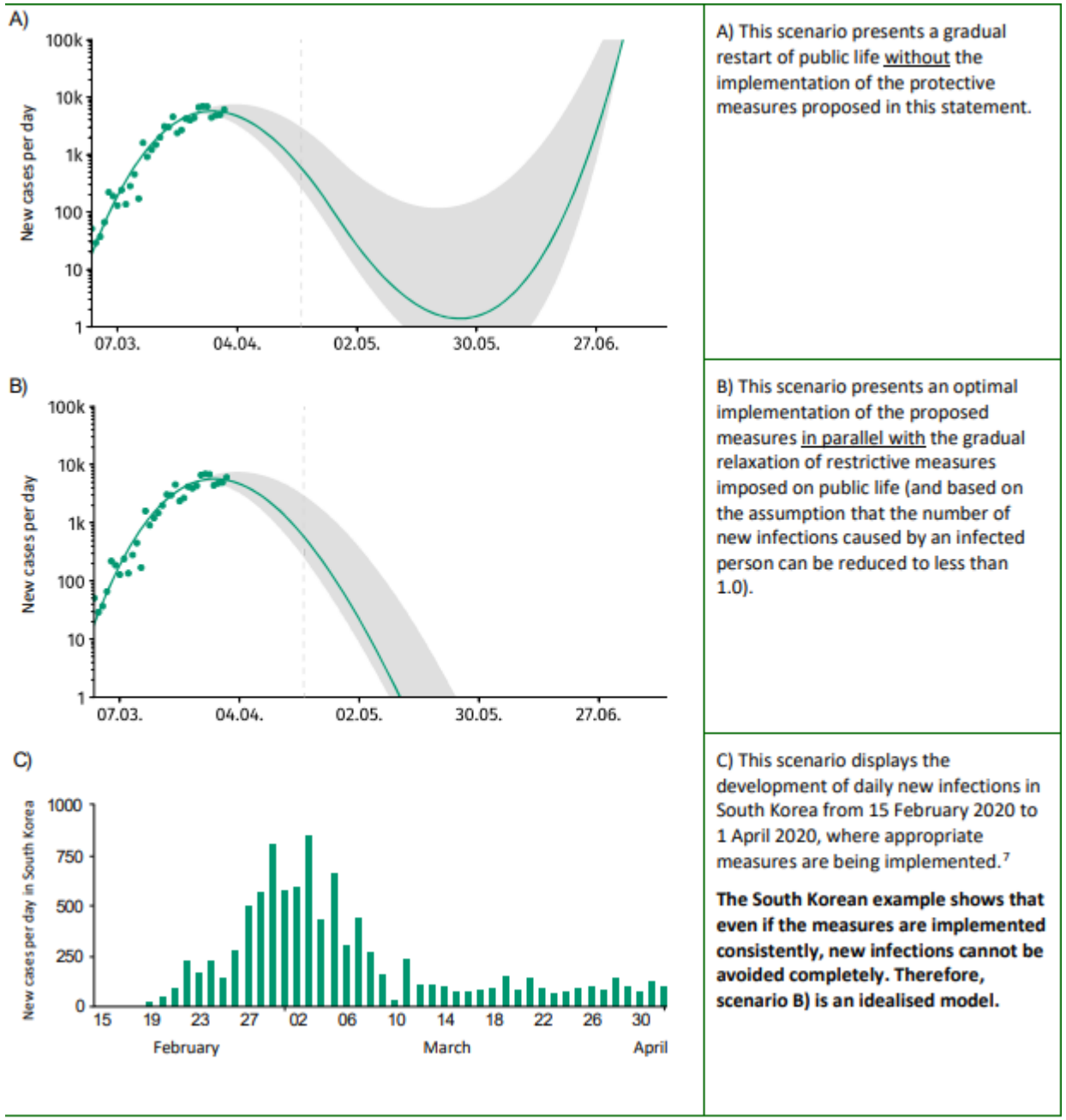
Ad-hoc-Statement, 3 April 2020

2nd Ad-hoc-Statement: Coronavirus Pandemic – Measures Relevant to Health

The German National Academy of Sciences Leopoldina has put forward a set of recommendations for the containment of the Coronavirus pandemic in its statement "The Corona Pandemic in Germany: Challenges and Options for Interventions", published on 21 March 2020.[1] These measures focus on the containment of the epidemic and the protection of vulnerable population groups. Additionally, a systematic and significant capacity increase of the public healthcare system and the public supply of essential goods and services is crucial. These recommendations remain valid and are herewith supplemented in light of recent developments. In the following statement, Leopoldina focuses on measures relevant to health, which can contribute to a gradual normalisation of public life. Three measures are particularly important: (1) general use of mouth and nose protection, (2) use of mobile phone data and (3) increase in testing capacities.

https://www.leopoldina.org/uploads/tx_leopublication/2020_04_08_2ad_hoc_statement_coronavirus_en_final_01.pdf

Mi lesz a korlátozások feloldása után?



A) This scenario presents a gradual restart of public life without the implementation of the protective measures proposed in this statement.

B) This scenario presents an optimal implementation of the proposed measures in parallel with the gradual relaxation of restrictive measures imposed on public life (and based on the assumption that the number of new infections caused by an infected person can be reduced to less than 1.0).

C) This scenario displays the development of daily new infections in South Korea from 15 February 2020 to 1 April 2020, where appropriate measures are being implemented.[7]

The South Korean example shows that even if the measures are implemented consistently, new infections cannot be avoided completely. Therefore, scenario B) is an idealised model.

Katasztrófa forgatókönyv:
Megszüntetjük a kijárási korlátozásokat
Minden további intézkedés nélkül:
Az esetszám felrobban.

Ideális forgatókönyv:
Megszüntetjük a kijárási korlátozásokat
+ Maszkviselés + kontakt követő app + tesztelés + stb.
A járvány lecsillapítható.

(Az A és B ábra Németországra vonatkozik.)

A Dél-Koreai példa:
Ők már megcsinálták.
A valóság az, hogy a sikeres járványcsillapítás
sem tudja a teljesen megszüntetni az új fertőzéseket.

COVID-2 járvány olvasnivalók

Imperial College, London jelentés, 2020. III. 16.:
https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/medicine/mrc-gida/2020-03-16-COVID19-Report-9.pdf

Vírus mutációk követése:
https://nextstrain.org/

Pueyo: The Hammer and the Dance:
https://medium.com/@tomaspueyo/coronavirus-the-hammer-and-the-dance-be9337092b56

Lancet COVID-19 task force az új vírus-változatokról:
Link