MESZÉNA GÉZA

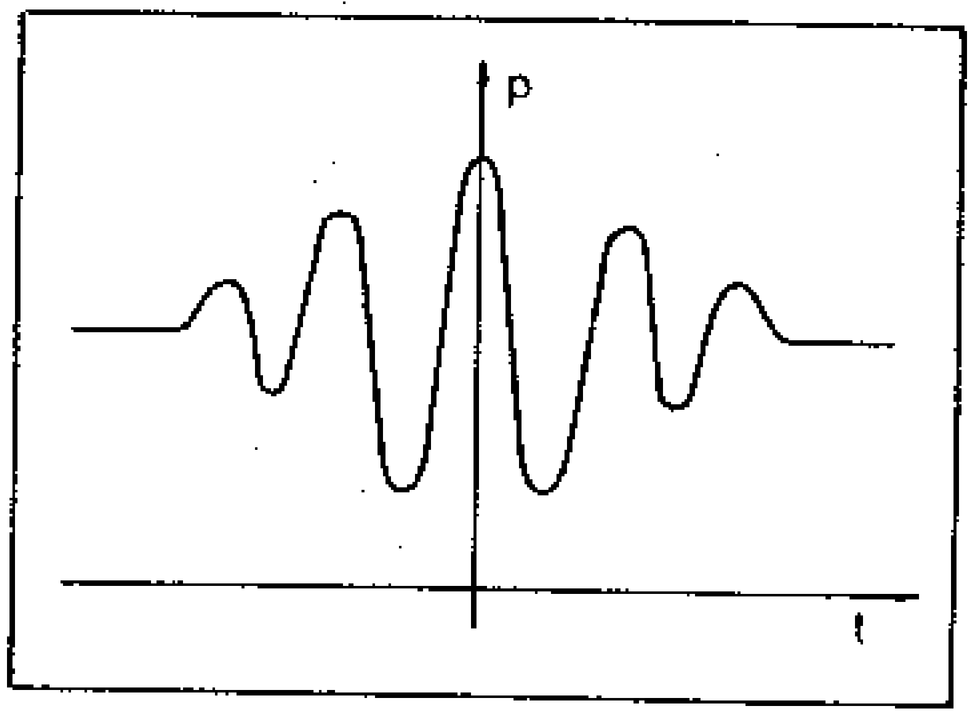
Rezgés-szám-tan

Egy paradoxon

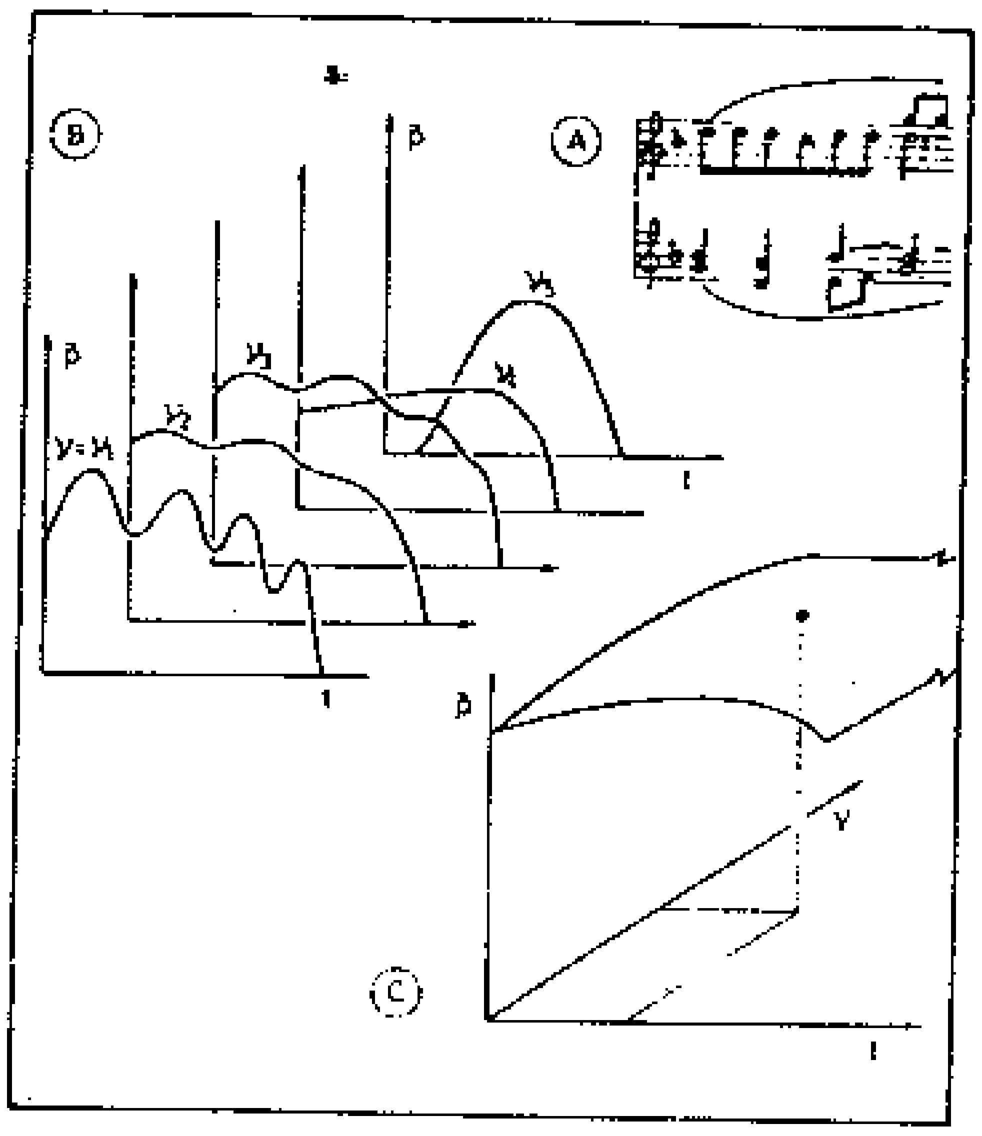
A hang nem más, mint szapora, tovaterjedő légnyomáshullám. Ha gondosan feljegyezzük, hogy ingadozott a légnyomás, s ezt az ingadozást újra előállítjuk, visszahalljuk az eredeti hangot. (A magnó, a lemezjátszó pont ezt teszi.) *(1. ábra).*

A zenész másképpen jegyzi le a hangot *(2/a ábra).* A kotta azt mondja meg, hogy mikor, milyen hangmagasságú (rezgésszámú, frekvenciájú) hang szólaljon meg. Ha a kotta tartalmát a fizikában szokásos módon akarjuk rögzíteni, több grafikont kell használnunk: minden frekvencia számára egyet-egyet *(2/b ábra).* A grafikonok megadják az illető magasságú hang erősségének időbeli ingadozását. A zenében szerencsére csak véges számú hangmagasság jön szóba — ezeket jelölik a kotta vonalai, vonalközei a különféle előjelzésekkel. A nem zenei hangok (pl. a lekottázhatatlan fékcsikorgás) azonban tetszőleges közbenső rezgésszámot is tartalmazhatnak. Így végül is egy háromdimenziós grafikonra van szükségünk *(2/c ábra),* amely megmondja, hogy egy meghatározott időpontban egy meghatározott magasságú hang milyen erősen szólt.

De milyen viszonyban van a kétféle leírás — az *1. ábráé,* ahogy egy mérnök látja a hangot, s a *2. ábráé,* ahogy egy zenész? Miként tartalmazhatja az *1. ábra* egyetlen grafikonja az összes információt, amihez a *2/b ábrán* sok grafikon, a *2/c ábrán* pedig egy magasabb dimenziószámú grafikon kellett? Ha ezt a paradoxont alaposan megértjük, mélyebb bepillantást nyerünk a rezgések természetrajzába, s ez a fizika igen sok területén válik hasznunkra.



1. ábra. Hangnyomás az idő függvényében



2. ábra. a) Hang, ahogy egy zenész látja; b) hangerősség az idő függvényében, különböző frekvenciákon; c) amplitúdó az idő és a frekvencia függvényében

A lebegés

Egy elég közismert jelenség fog minket nyomra vezetni: A lebegésről van szó: két egymáshoz elég közeli rezgésszámú hang együtt egyetlen, de szaporán ingadozó erősségű (= amplitúdójú) hangnak hallatszik.

Miért is van ez? Két *pontosan* azonos frekvenciájú hang vagy erősíti, vagy gyengíti egymást, attól függően, hogy azonos vagy ellentétes fázisban érkeznek-e. Ha a két rezgésszám közt icipici különbség van, ez az első ránézésre nem változtat sokat a dolgon. Csakhogy most a fáziskülönbség időben változik: a kisebb frekvenciájú rezgés fokozatosan elmarad a másikhoz képest. Ha kezdetben azonos fázisban voltak s erősítették egymást, egy idő múlva ellentétes fázisban lesznek és gyengíteni fogják egymást, majd újra erősíteni stb. (lásd a *13. ábra* bal oldalát).

Ha a frekvenciák közti különbség $\Delta\nu$, vagyis időegységenként $\Delta\nu$ vel rezeg több-bet a szaporább rezgés a másiknál, akkor $\Delta t = \frac{1}{\Delta\nu}$ idő kell ahhoz, hogy a fürgébb rezgés egy teljes periódusnyival „leköröze" a másikat. Ha egy pillanatban a két rezgés épp erősítette egymást, $\Delta t/2$ idő múlva — amikor a lassabbik már fél periódussal lemaradt — maximálisan gyengíteni fogja egymást, s újabb $\Delta t/2$ idő múlva lép fel újra erősítés. Tehát a „lebegés" frekvenciája éppen $\Delta t = \frac{1}{\Delta\nu}$. Képletben ugyanez:

$$\cos(2\pi\nu_1 t) + \cos(2\pi\nu_2 t) = 2\cos\left(2\pi\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t\right)\cdot\cos\left(2\pi\frac{\nu_1+\nu_2}{2}t\right),$$

vagyis a két rezgés összege felfogható úgy is, mint egy $\frac{\nu_1-\nu_2}{2}$ és egy $\frac{\nu_1+\nu_2}{2}$ frekvenciájú rezgés szorzata. (Ezt úgy mondjuk, hogy az előbbi rezgés modulálja az utóbbit. Az olvasóra bízzuk annak átgondolását, hogy miért a frekvenciakülönbség *fele* jelenik meg a formulában.)

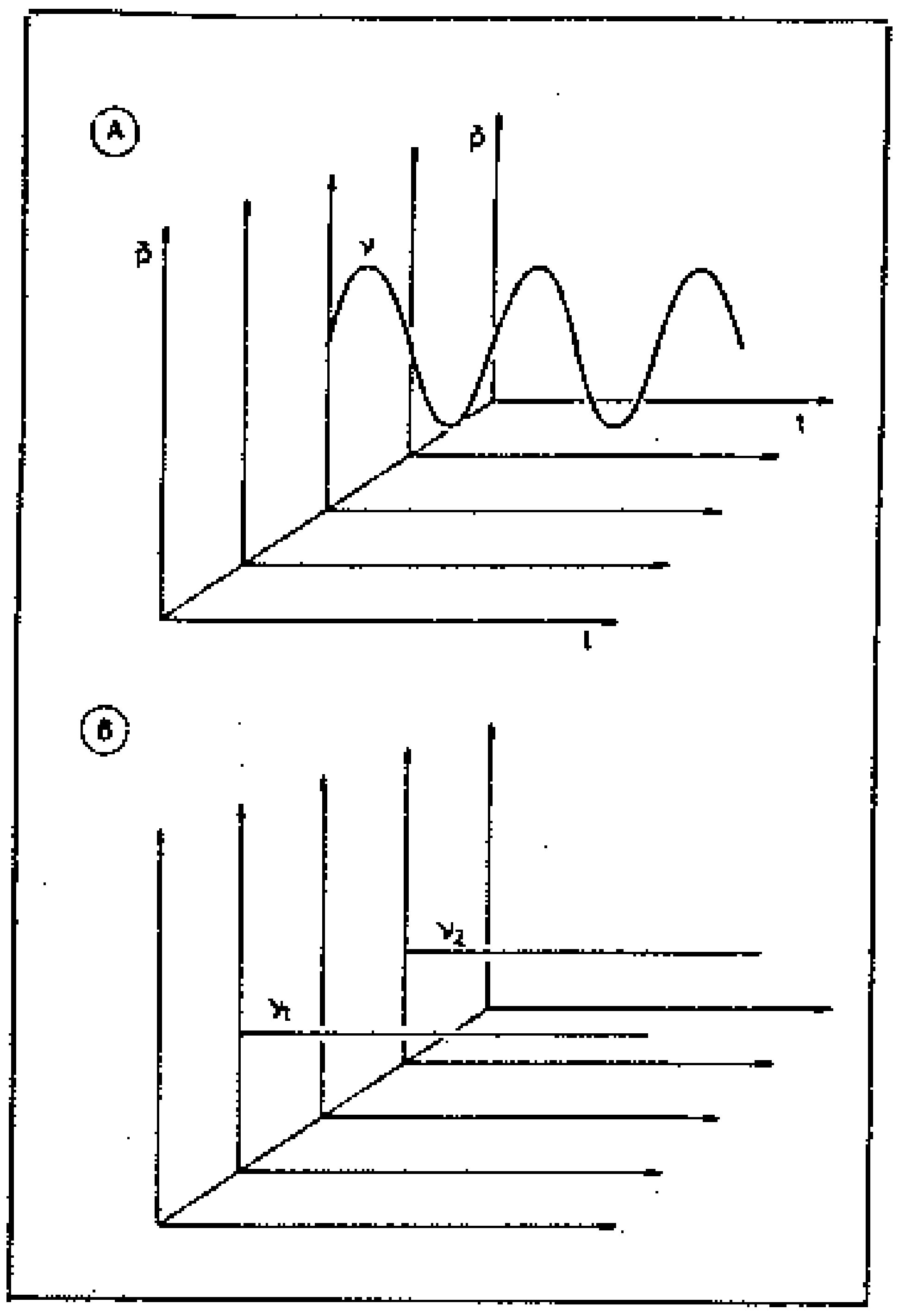
A *13. ábra* grafikonja ugyanolyan jellegű, mint az *1. ábráé:* nyomás az idő függvényében. Bajba kerülünk azonban, ha ugyanezt a *2/b* vagy *2/c* mintájára akarjuk ábrázolni. Akkor ugyanis el kell döntenünk, hogy a hang egyetlen frekvenciát tartalmaz változó amplitúdóval, vagy két különböző frekvenciát, mindkettőt állandó amplitúdóval *(3. ábra).*

A kérdés azonban abszurd. Éppen azt láttuk be az imént, hogy *ugyanazt* a hangot, *ugyanazt* a fizikai szituációt ábrázolja a *3/a* és a *3/b ábra.* A hangok leírásának az a módja, amelyet a kotta sugallt, csak látszólag gazdagabb, mint a nyomás-idő-grafikon: attól változatosabb, hogy többféleképpen ábrázolható benne *ugyanaz* a rezgés.

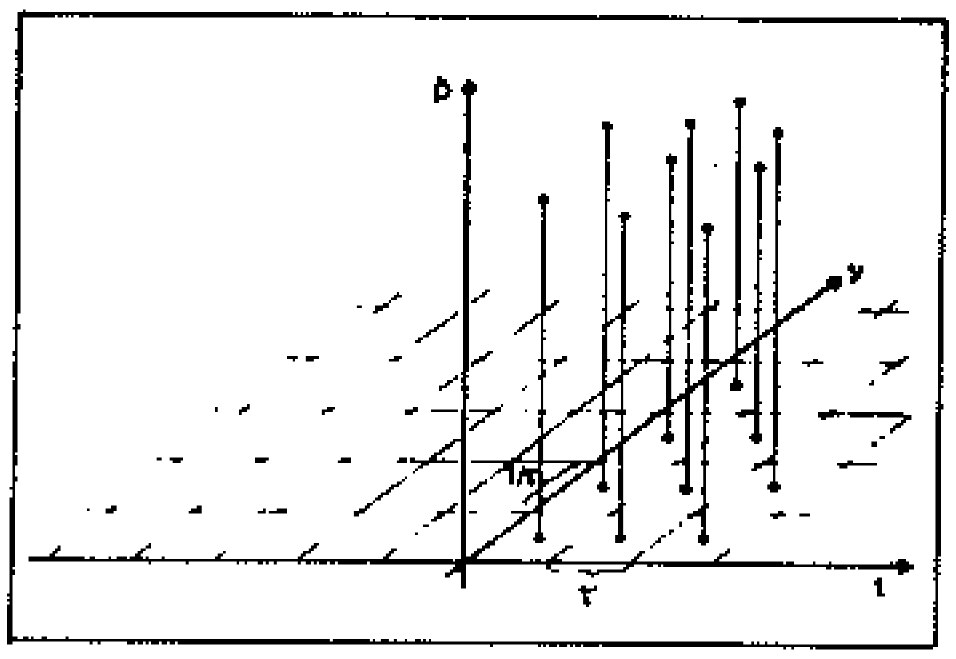
Határozatlansági reláció

De mégis: egy zenész számára az a kérdés, hogy egy hang egyetlen frekvenciát tartalmaz vagy többet, egyszerű — hallással eldönthető — kérdés, nem valami „nézőpont kérdése" dolog. A rezgésszámok világában való eligazodáshoz először is meg kell értenünk, min múlik az, hogy a *13. ábra* nyomáshullámát változó intenzitású hangnak, két hangmagasság együttesének halljuk.

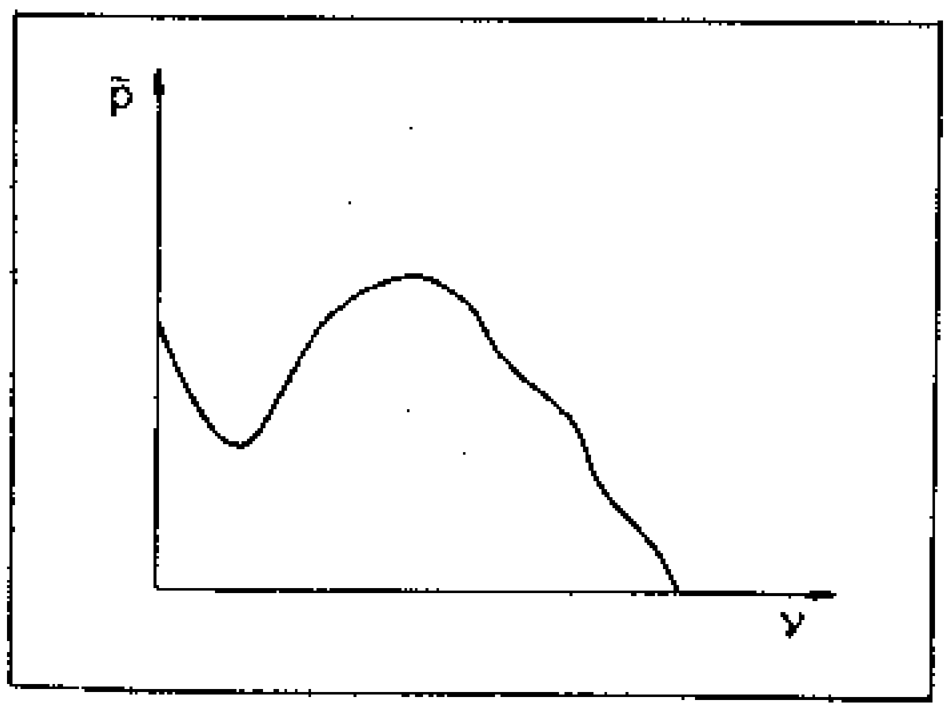
Szükségünk vagy egy τ időre ahhoz, hogy a hang magasságát, erősségét megítéljük. (τ értéke tizedmásodperc körül lehet, hatalmas egyéni eltérésekkel s a szituációtól is függően.) Ha a Δt lebegési periódus jóval a τ észlelési idő alatt van (pl. $\Delta t = 0{,}001$ sec), akkor nincs időnk észrevenni a hangerősség ingadozását. De hogy nem tiszta hangról van szó, azt a jó fülű ember mindenképpen meg tudja állapítani. Így ebben az esetben biztosan az időben állandó, de kevert hang mellett döntünk. Ha viszont $\Delta t \gg \tau$ (pl. $\Delta t = 10$ sec), a τ idő alatt gyakorlatilag nincs különbség a két frekvencia között, a



3. ábra. Lebegés a 2/b ábra mintájára: a) egyetlen ν frekvenciát tartalmazó, változó intenzitású hang; b) két, ν_1 és ν_2 frekvenciát tartalmazó hang



4. ábra. Amplitúdó az idő és a frekvencia függvényében (a 2/c ábra helyett)



5. ábra. Frekvenciaspektrum: amplitúdó a frekvencia függvényében

két rezgés fázisa nem tolódik el egymáshoz képest észrevehetően. A τ idő alatt nem fog sikerülni két hangmagasságot megkülönböztetni. Egyetlen hangot fogunk hallani, kisebb vagy nagyobb amplitúdóval, a két összetevő hang pillanatnyi relatív fázisa szerint. Sok egymás utáni τ idő alatt persze már megváltoznak a fázisviszonyok, s egy idő múlva halkabban, majd újra hangosabban halljuk ugyanazt a hangot.

Két hangmagasságot tehát akkor fogunk különbözőnek hallani, ha $\Delta t < \tau$, azaz ha a frekvenciakülönbség felette van az észlelési idő reciprokának: $\Delta\nu > \frac{1}{\tau}$ · (*)

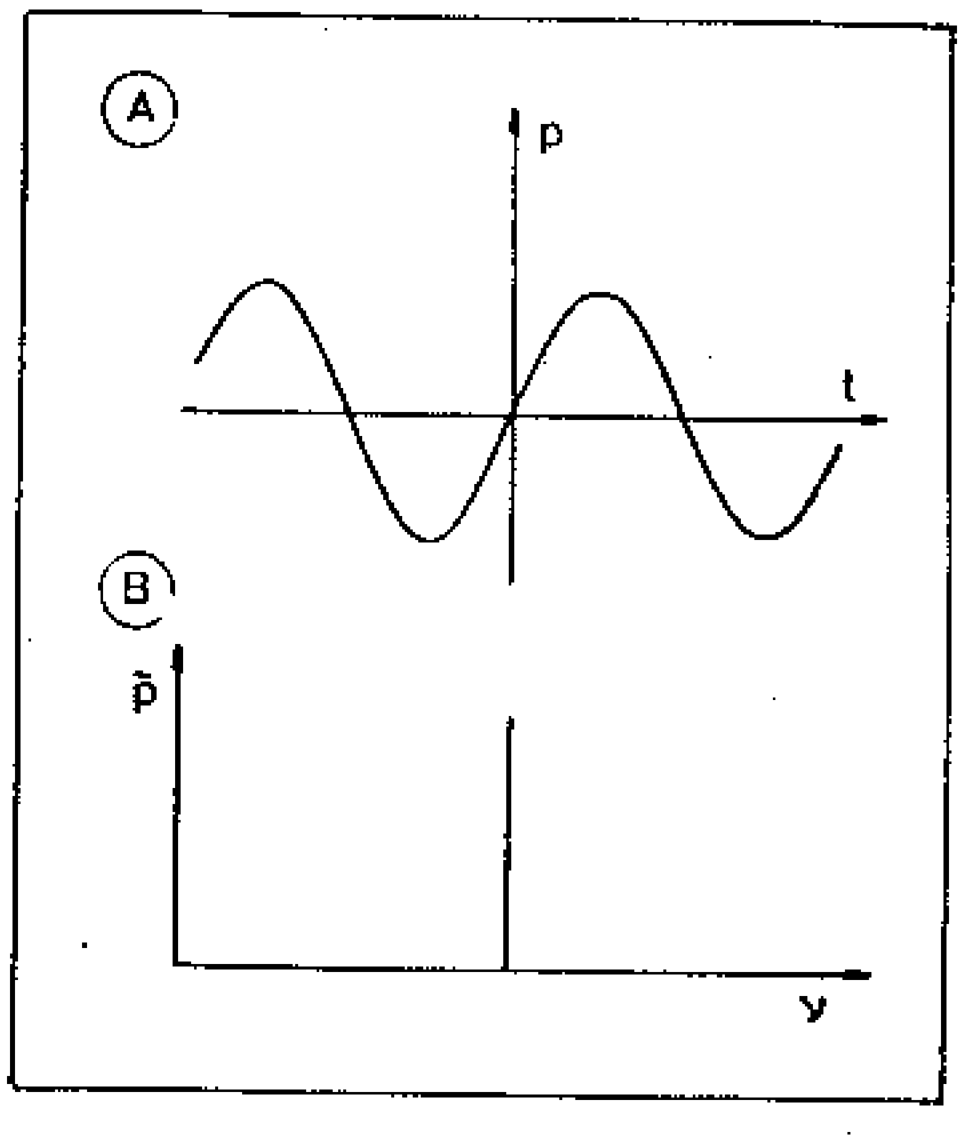
Értelemszerűen így van ez kettőnél több frekvencia esetén is. Minél rövidebb az észlelési idő, annál durvább a frekvenciafelbontásunk, annál több frekvencia mosódik felbonthatatlanul egybe. τ csökkentésekor azonban mégsem vesztünk el semmit. A közeli frekvenciák összeolvadása miatt eltűnő információt pótolják a részletesebb időfelbontás miatt megjelenő részletek. Ha viszont τ-t növeljük, az elvesző időbeli részletek lesznek a finomodó frekvenciafelbontásban képviselve.

Fontos, hogy tisztán lássuk: nem valami fiziológiai vagy technikai tökéletlenség akadályoz meg minket abban, hogy egyszerre tökéletes időbeli és frekvenciabeli felbontásra törekedjünk. Elvileg értelmetlen ezredmásodpercenként érdeklődni, ezred Hz-es pontossággal egy rezgés frekvenciája iránt, amikor ezred Hz-es rezgésszámváltozás csak kb. ezer másodperc alatt érvényesíti hatását. Az időbeli és a frekvenciabeli felbontásra a (*) összefüggésnek kell fennállnia, hogy a többértelműséget elkerüljük. Nevezzük határozatlansági relációnak ezt az összefüggést. A mondottak persze azt is jelentik, hogy egy Δt ideig tartó hang rezgésszámát nem mérhetjük $\Delta\nu = 1/\Delta t$-nél pontosabban.

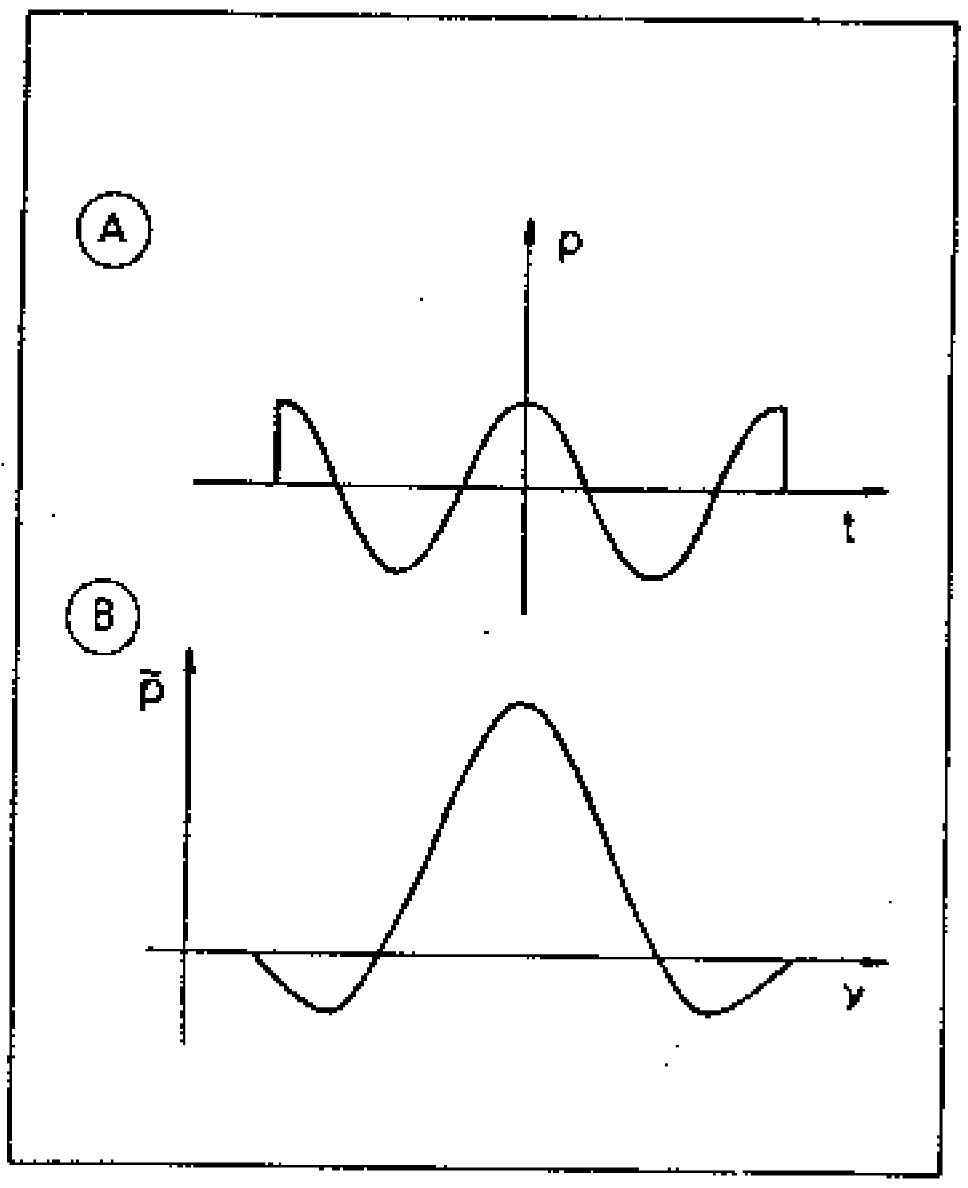
Most már világos, hogy mi a probléma a *2. ábrával* kapcsolatban. A *4. ábra* hivatott a *2/c ábrát* helyettesíteni. Az idő-frekvencia síkot téglalapokra bontottuk, melyek „időarányú" oldalhosszúsága τ, „frekvenciairányú" oldalhosszúsága pedig $1/\tau$; területük így 1. Ezen egységnyi területű téglalapok mindegyikéhez rendelhetünk egy (de csak egy!) amplitúdóértéket, τ értéke tetszőleges. Választhatjuk kicsire, ekkor gyakran mondjuk meg a kevés megkülönböztetett rezgésszámhoz tartozó amplitúdót, de választhatjuk nagyra is, ekkor ritkábban ugyan, de részletesebb jellemzést adunk a hangról.

A leírtaknak a zenében nincs különösebb jelentőségük. Két, a zongorán szomszédos hang frekvenciájának aránya $\sqrt[12]{2} = 1{,}06$. Ez azt jelenti, hogy a 440 Hz-es normál A hang szomszédaitól kb. 25 Hz távolságra van. E két frekvencia megkülönböztetéshez elvileg legalább 1/25 sec = 0,04 sec időre van szükség. A zenei gyakorlatban azonban ennél mindig jóval több idő áll rendelkezésünkre. (Igaz, a két legmélyebb hang között már csak 1,64 Hz a különbség, amihez már 0,6 sec idő tartozik. Ez esetben már a határon vagyunk.)

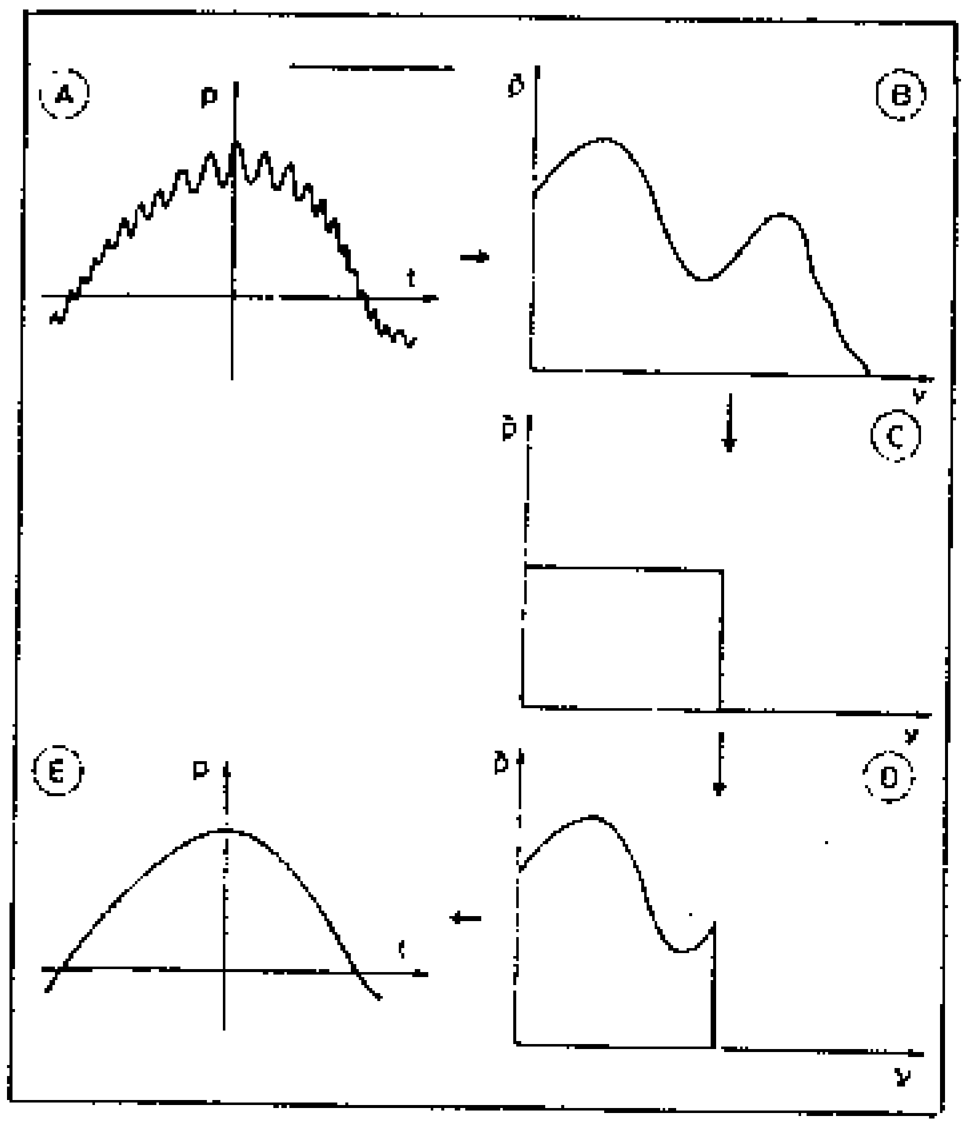
Annál fontosabb viszont a dolog a rádiótechnikában. A fentiekből következően minél szigorúbban rögzítjük egy adóállomás frekvenciáját, annál kevésbé képes az időbeli mintázatok (vagyis információ) átvitelére. A hang megfelelő átviteléhez kb. 10^{-4} másodperces, a tévékép átviteléhez viszont 10^{-7} másodperces időfelbontásra van szükség, ez azonban azt is jelenti, hogy a rádió-, ill. a tévéadó frekvenciáját nem lehet 10 kHz-nél, ill.



6. ábra. Harmonikus rezgés: a) az idő, b) a frekvencia függvényében



7. ábra. Véges ideig tartó harmonikus rezgés



8. ábra. Hangszóró a) Az átviendő jel az idő függvényében; b) a jel frekvenciaspektruma; c) a hangszóró frekvenciaátvitele; d) a kijövő jel a frekvencia függvényében; e) ugyanez az idő függvényében

10 MHz-nél pontosabban rögzíteni. Ha nem akarjuk, hogy a különböző műsorok összekeveredjenek, az adóállomások frekvenciájának legalább ennyire — de inkább jobban — kell különbözniük egymástól. (Ez az ún. sávszélesség.)

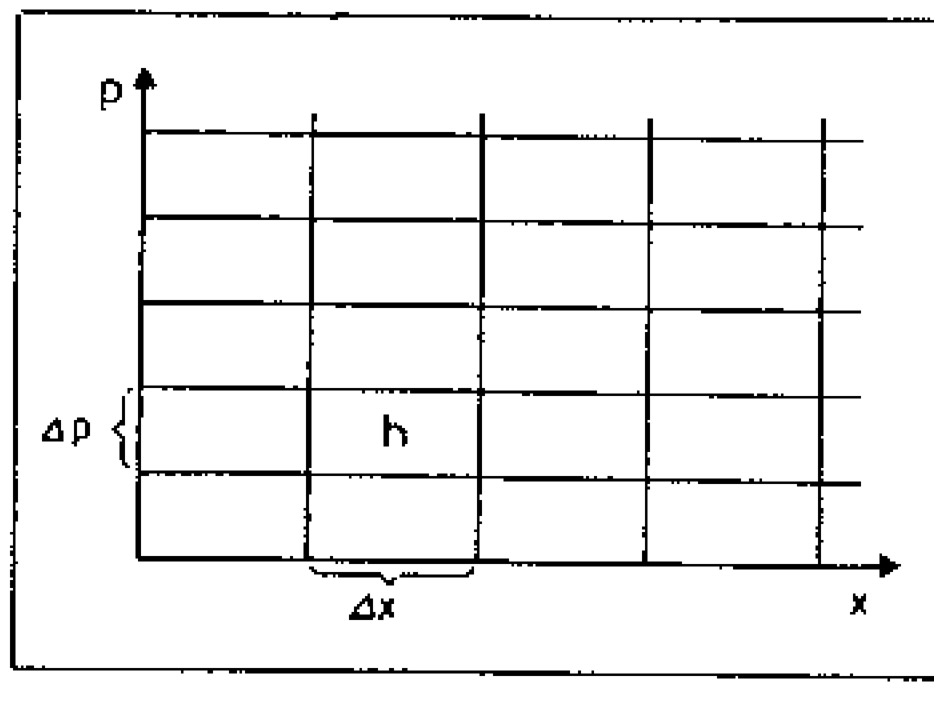
Ha nem szubjektív észlelésről, hanem műszeres mérésről van szó, τ-t akármilyen kicsire választhatjuk. Ha τ jóval kisebb lesz a legmagasabb hang periódusidejénél is, akkor a τ időtartamon belül rezgésszámról egyáltalán nem beszélhetünk. A *4. ábra* téglalapjai keskeny-hosszúkásakká válnak, s a $\tau \to 0$ határesetben visszajutunk az 1. *grafikon*hoz, ahol minden időpontban adott a hangnyomás értéke, frekvenciáról viszont nem esik szó.

A frekvenciaspektrum

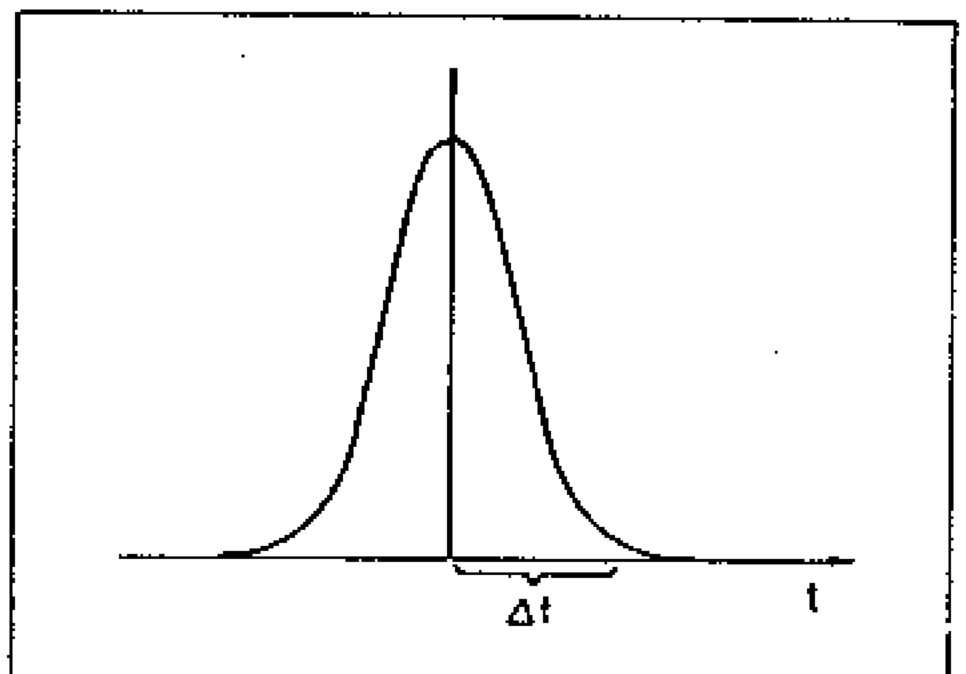
Létezik persze egy másik, az $\frac{1}{\tau} \to 0$ határeset is *(5. ábra)*. Ha τ hosszabb az egész zenedarabnál, annak időbeli lefutását nem tudjuk nyomon követni. Mégsem vesztünk információt, mert az igen finoman rögzíthető frekvenciaárnyalatok hordoznak minden információt. Az *5. ábra* grafikonját — ahol most nem a frekvencia-, hanem az időtengely marad el — frekvencia-spektrumnak nevezzük. E függvény alapján elvileg ugyanúgy reprodukálható egy zongoraverseny, mint a nyomás—idő függvény alapján.

Egy állandó amplitúdójú és frekvenciájú tiszta színuszos rezgés (más szóval harmonikus rezgés) frekvenciája persze pontosan annyi, amennyi, a spektrum csak egyetlen frekvenciát tartalmaz *(6. ábra)*. Ha igaz, hogy a frekvenciaspektrum egyértelműen meghatározza az időbeli lefutást, akkor ez fordítva is áll: egyetlen vonalból álló spektrumhoz csak egy örök időktől fogva és örök időkig tartó harmonikus rezgés tartozhat. (Ilyennel persze csak a mesében és matekkönyvekben találkozhatunk.) Ha egy rezgés csak egy véges Δt ideig tart, akkor — mint már említettük — nem rendelhető hozzá egy egzaktul meghatározott frekvenciaérték. A spektrum ekkor kiszélesedik legalább $\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t}$ szélességűre *(7. ábra)*. (Később látunk majd példát nem harmonikus rezgés spektrumára.) Ez a kiszélesedés hordozza a spektrumban az információt a rezgés véges időbeli hosszúságáról.

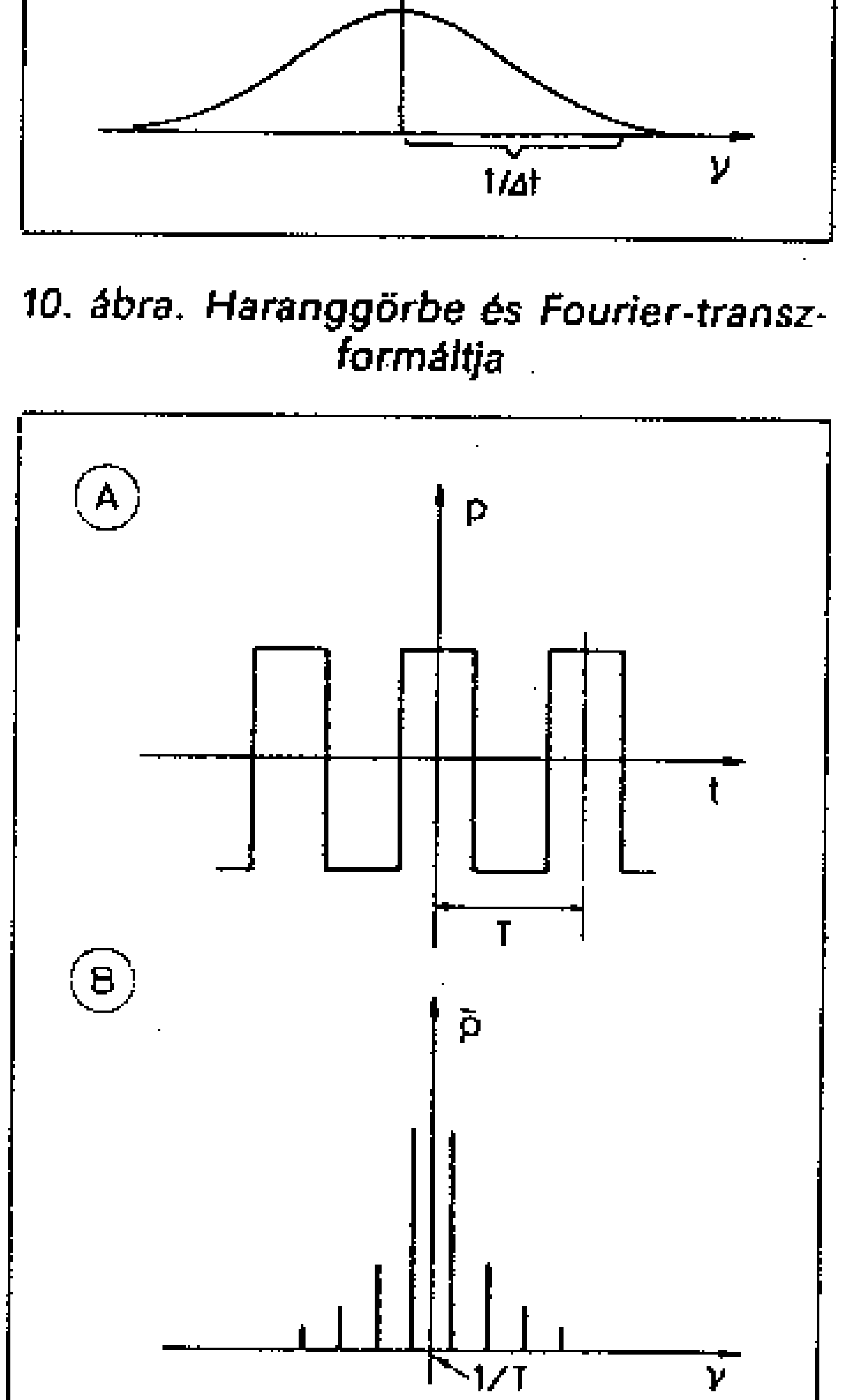
Mit is jelent ez? Azt, hogy a *7. ábra* véges rezgése előállítható végtelen harmonikus rezgések eredőjeként. (E rezgésekből sajnos végtelen sokra van szükségünk, s így az előállítást nem tudjuk szépen lerajzolni.) A 7/b grafikon azt mondja meg, hogy melyik frekvenciájú rezgésből mekkora amplitúdójút kell a keverékbe belevennünk. Bármennyire hihetetlen, igaz: a végtelen sok, végtelen hosszú, különböző frekvenciájú és amplitúdójú rezgés eredője pontosan nulla lesz minden olyan időpontban, amely kívül esik a Δt időintervallumon. Ezt a tényt már nem lehet olyan szemléletesen megérteni, mint két rezgés esetén a lebegést, de matematikailag szigorúan igazolható. (Amihez



9. ábra. Fázistér, fáziscellák



10. ábra. Haranggörbe és Fourier-transzformáltja



11. ábra. Periodikus függvény és Fourier-transzformáltja (A konkrét példában a páros felharmonikusok hiányzanak.)

persze szigorúan definiálni kell az itt nagyon pongyolán használt fogalmakat.)

Általánosabban is fogalmazhatunk: Egy fizikai mennyiség (példánkban a légnyomás) *bármilyen* időbeli lefutása előállítható harmonikus rezgések összegeként, azaz *bármilyen* időbeli lefutás jellemezhető frekvenciaspektrummal. *Fourier-transzformációnak* nevezzük azt a matematikai műveletet, amely a jelenség időfüggéséből a spektrumát (vagy viszont) előállítja. (A matematikusok sok olyan függvényt ismernek, amelynek nincs Fourier-transzformáltja, ezek azonban a szóban forgó jelenségek leírásában nem kerülnek elő. Pl. nem folytonosak, vagy egyéb rossz tulajdonságaik vannak.)

E tétel első változatát *Dirichlet* bizonyította be 1829-ben, évszázados vitát döntve el ezzel. Egyes matematikusok (pl. *Bernoulli* vagy már a 19. században a névadó *Fourier*) ugyanis már régóta felhasználták (eredménnyel) ezt az előállítást fizikai problémák vizsgálatára, míg mások (pl. Euler is) a dolgot képtelenségnek tartották. Ez utóbbiak szemlélete az olyan „mechanikai" görbéket, amelyek egyes szakaszai között semmi összefüggés sincs, szembeállította az „igazi"-nak érzett (képlettel megadható, analitikus) függvényekkel (melyek egy kis darabjából is rekonstruálható az egész). „Szabálytalan" görbék színuszok összegére bontása s így „analitikus" megadásuk összezavarta ezt a képet, s elvezetett ahhoz az egyszerű, de általános függvényfogalomhoz, amellyel ma minden gimnazista találkozik.

A frekvenciaspektrum alkalmatlan arra, hogy a hangrögzítési eljárás alapja legyen. Kiváló elméleti eszköz azonban a híradástechnikusok kezében. A rádiómérnököt pl. nem az érdekli, hogyan ingadozik a kisugárzott rádiójel amplitúdója a továbbított hangnak megfelelően, hanem az, hogy ez az ingadozás hogy képviselteti magát a sugárzott jel frekvenciaeloszlásában. Ennek ismeretében lehet a vevőkészülék frekvencia-szelektivitását úgy beállítani, hogy az egy adótól származó frekvenciákat mind felfogja, de a szomszéd adókét már ne.

Másik példa: tudjuk, hogy egy hangszóró mely frekvenciákat képes megszólaltatni és melyeket nem. Ha az átviendő jelnek ismerjük a spektrumát, s ebből elhagyjuk azokat a rezgésszámokat, amelyeket a hangszóró nem visz át, megkapjuk a keletkezett hang spektrumát. Ebből az időbeli lefolyást egy Fourier-transzformációval megkaphatjuk. A legtipikusabb esetben a magas hangok esnek leginkább áldozatul. Ez az eset látható a *8. ábrán*. Az eredeti jel tartalmazott egy nagyfrekvenciás komponenst, ami az időfüggésben egy szapora recegésként jelentkezik. A kimenő jelből ez a „recegés" hiányzik. A jelenség persze frekvenciákra való hivatkozás nélkül is megérthető: a gyors recegést a hangszóró membránja nem bírja követni, az kisimul. A hangszóró eme „simító" hatását azonban sokkal nehezebb számszerűen jellemezni, mint megadni a „felső határfrekvenciát".

Energia-határozatlanság

Az olvasó nyilván hallott már a határozatlansági relációról, csak nem rádióadókkal, hanem elemi részecskékkel kapcsolatban. A kettő azonban ugyanaz.

Egy részecske energiája nem más, mint egy rezgés frekvenciája. Az energiát Hz-ben is mérhetnénk, csak ez túl kis egység lenne. 1 eV energia $2,4 \cdot 10^{14}$ Hz-es rezgésszámnak felel meg. A „szokásos" energiaegység és a Hz közti átszámítási tényező a híres Planck-állandó:

$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Joule/Hz

Egy ν frekvenciájú részecske energiája így a szokásos egységben: $E = h \cdot \nu$.

Tudjuk mármost, hogy csak egy örök életű rezgésnek van pontosan meghatározott rezgésszáma. Ha a részecske élettartama csak Δt, frekvenciaspektruma legalább $\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t}$ széles, s így energiájában van egy

$E = h/\Delta t$

bizonytalanság. Ez az egyik kvantummechanikai határozatlansági reláció.

Részecskeütköztetési kísérletekben gyakran keletkeznek olyan rövid élettartamú részecskék, amelyek még jóval azelőtt elbomlanak, hogy megfigyelhetnénk őket. Ezek létére csak bomlástermékeik alapján következtethetünk. Élettartamukat a határozatlansági reláció segítségével határozhatjuk meg, a kijövő részecskék energiájának szórása alapján.

Térbeli hullámok, avagy az anyag struktúrája

A fentiekben nem túl sok jelentősége volt annak, hogy pont az idő volt a független változója azoknak a függvényeknek, amelyeket előszeretettel bontogattunk szinuszfüggvények eredőjére. Időbeli rezgések helyett beszélhetünk térben kiterjedt hullámokról is. A frekvencia térbeli analógja a λ hullámhossz reciproka, a $k = 1/\lambda$ *hullámszám*. Egy részecske hullámszáma impulzusával van ugyanolyan viszonyban, mint a rezgésszám az energiával:

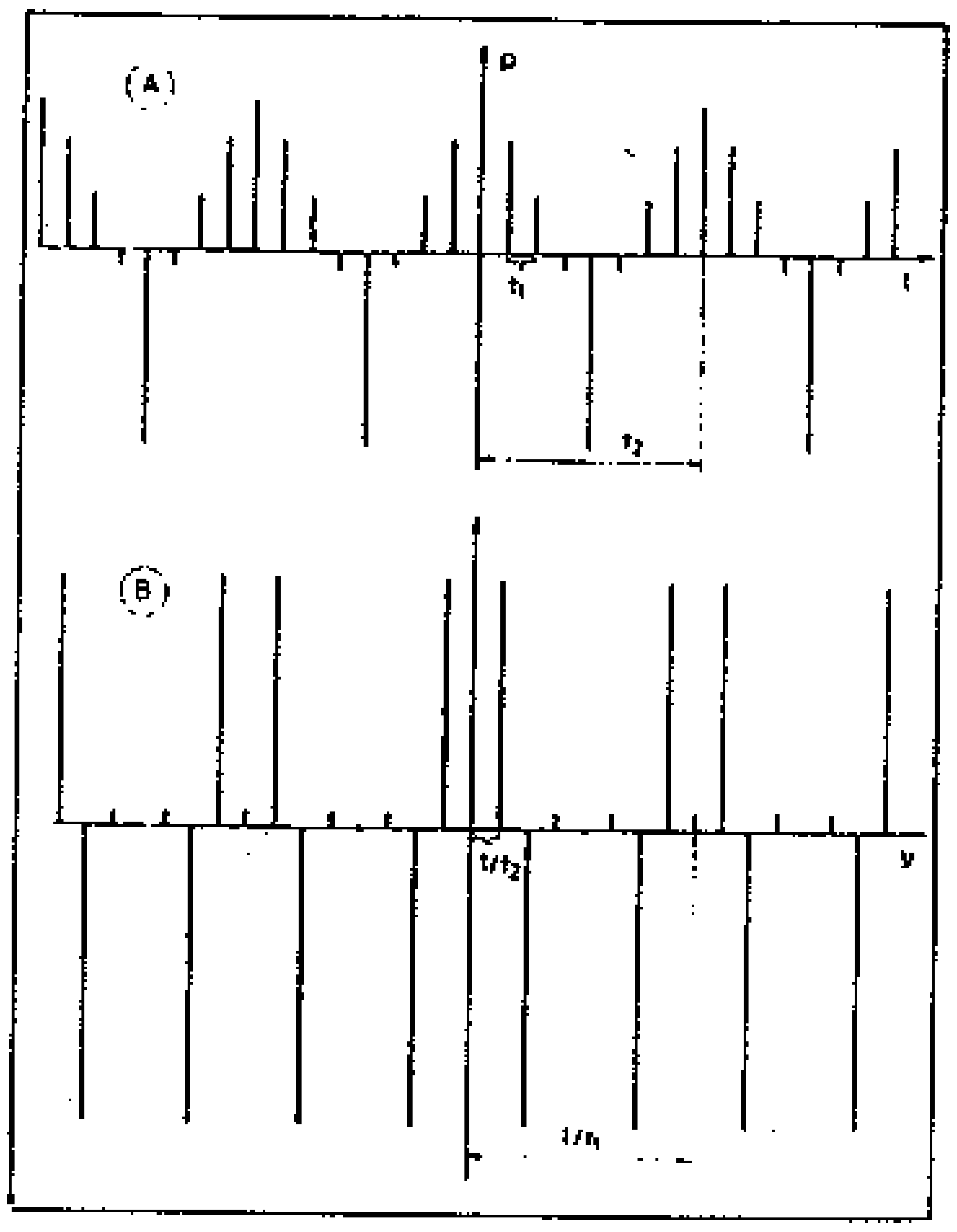
$$p = h \cdot k$$

Térbeli hullámokra is érvényes persze a fent leírttal analóg határozatlansági reláció, s így kapunk egy összefüggést a részecske hely- és impulzusbizonytalansága között:

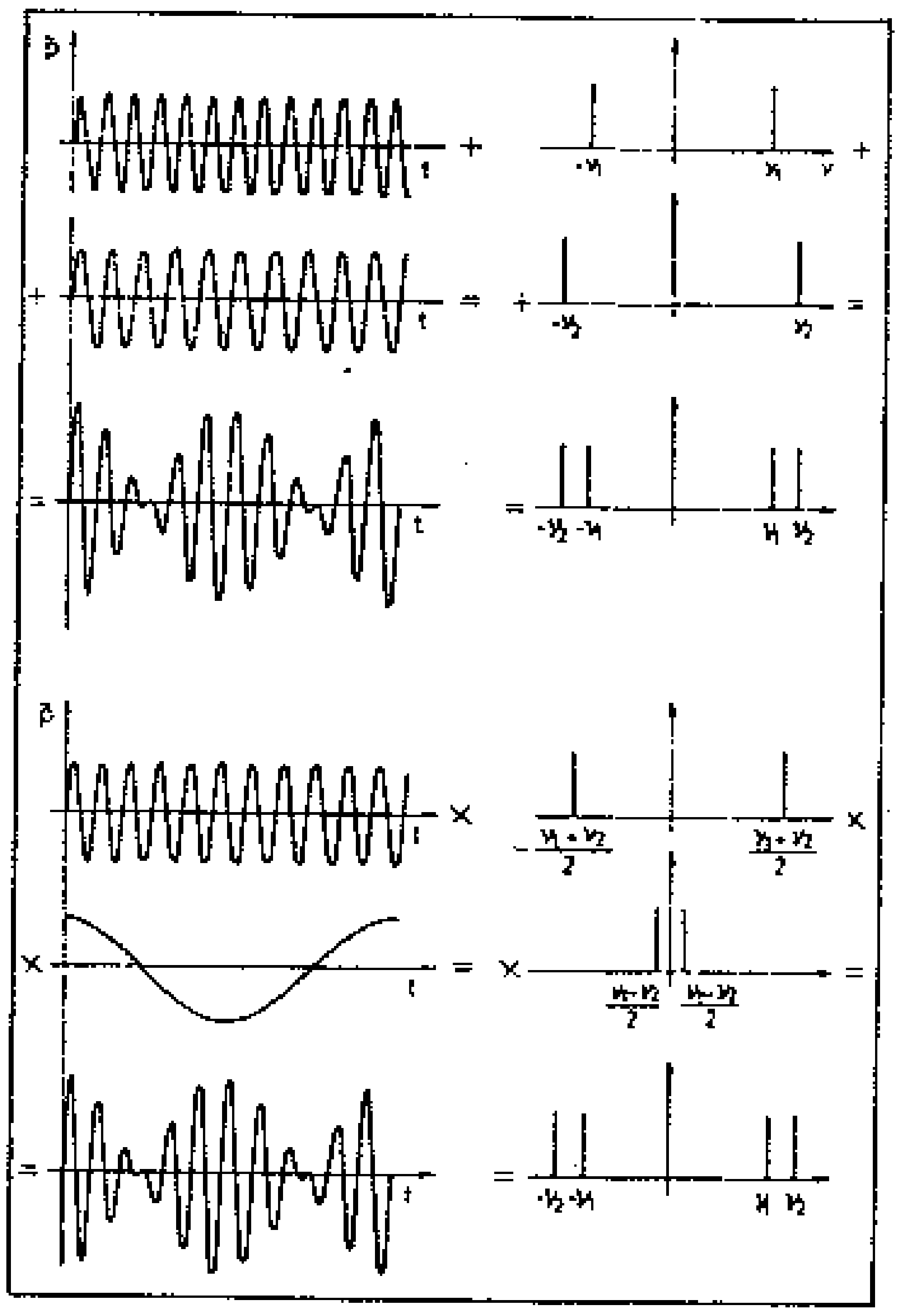
$$\Delta x \cdot \Delta p > h$$

Egy részecskehullám impulzusa/hullámszáma csak akkor lehet pontosan meghatározott, ha térben igen nagy kiterjedésű. Térben lokalizált „hullámcsomag"-ot csak sok különböző hullámszámú hullámból rakhatunk össze, s ekkor az impulzus nem lesz pontosan definiált érték. Ez a mikrofizika másik — talán híresebb — határozatlansági relációja.

A klasszikus fizikában egy részecske mozgásállapotát azzal jellemezhetjük, hogy megadjuk helyét és impulzusát. A tanultak fényében ez a mikrovilágra csak jókora változtatással vihető át. A helykoordináta és az impulzustengely által kifeszített fiktív teret fel kell osztani h területű téglalapokra, az ún. fáziscellákra. (A szóban forgó absztrakt teret hívjuk fázistérnek.) A részecskét azzal jellemezhetjük, hogy melyik fáziscellában található *(9. ábra)*. Több részecske esetén azt kell megadnunk, melyik fáziscellában hány részecske található — nagyjából ez felel meg az amplitúdónak.



12. ábra. A t_2 periódusú függvény t_1 időnként mintavételezve és Fourier-transzformáltja



13. ábra. A lebegés előállítható két harmonikus rezgés összegeként és szorzataként is. Mi történik e közben a spektrumokkal?

A fáziscella fogalmát az teszi alig túlbecsülhető fontosságúvá, hogy a részecskék egy széles osztálya (ide tartozik az elektron, proton, neutron, a kvarkok, de pl. nem tartozik ide a foton) olyan, hogy egy cellában maximum két egyforma részecske foglalhat helyet (Pauli-elv). Adott számú elektron tehát biztosan elfoglal egy bizonyos térfogatot a fázistérből. Mivel az impulzusirányú terjeszkedés lehetősége korlátozott (nagy impulzusokhoz mindig nagy energia is tartozik, energiából pedig sosincs akármennyi), elektronjaink kénytelenek a szokásos értelemben vett térből elfoglalni egy meghatározott térfogatot.

Ezért nem esik bele az elektron az atommagba, s ezért van az atomoknak, molekuláknak meghatározott struktúrája. Ezen múlik az atomos anyag térbeli strukturáltsága. Két atomos anyagból álló tárgy azért nem lehet egyszerre ugyanazon a helyen, mert akkor az egyik tárgy elektronjai a másik elektronjai által már elfoglalt fáziscellákba kerülnének.

Kicsit részletesebben a Fourier-transzformációról

A kvantumfizika területét azonban el kell hagynunk, mielőtt a figyelmes olvasó olyan kérdéseket tenne fel, amelyeket e helyütt úgysem tudnánk megválaszolni. Visszatérve a „klasszikus" rezgésekhez, be kell vallanunk egy eddig elhallgatott problémát. Azt tudniillik, hogy hiába mondjuk meg, milyen frekvenciájú harmonikus rezgésekből mennyit kell összerakni egy bizonyos időfüggés előállításához, ha nem mondjuk meg azt, hogy milyen fázissal. A probléma nem túl nagy: nem kell az *5. ábrát* még egy fázis tengellyel is kiegészíteni, elég megduplázni. Szinusz- és koszinuszfüggvények már tényleg elegendőek minden számunkra érdekes függvény előállításához. Ebben a cikkben azonban engedjék meg, hogy még ezt a kis pluszbonyolultságot is elkerüljük. Szorítkozzunk szimmetrikus függvényekre, azaz tegyük fel, hogy a vizsgált mennyiség értéke a t időpontban pont annyi, mint $-t$-ben. (Ez a pótmegkötés az olvasót nem fogja zavarni, a cikkíró lelkiismeretét viszont megnyugtatja, mert ezen előírás után már nem jön szóba több lehetséges fázis ugyanannál a harmonikus rezgésnél. Miért?) S egyúttal bejelenti a cikkíró, hogy ezentúl a frekvenciaspektrumokat is szimmetrikusra rajzolja (noha persze a negatív frekvenciáknak nincs semmi értelmük), így az alább következő szabályszerűségek egyszerűbb alakúak.

Ha az olvasó ismeri a komplex számok fogalmát (érdekes és nem túl nehéz része a matematikának, önmagáért is érdemes megbarátkozni vele), a dolgok leegyszerűsödnek. Ekkor ugyanis $\sin(2\pi\nu t)$ és $\cos(2\pi\nu t)$ függvények helyett $exp(2\pi\nu t)$ függvények összegére kell bontani az időfüggést, és a spektrum komplex fázisszöge hordozza a fázisinformációt. Így már értelmet kap a negatív frekvencia is, valós függvény Fourier-transzformáltjára $g(-\nu) = \overline{g(\nu)}$ áll. Valós szimmetrikus függvény transzformáltja is valós és szimmetrikus.

A 10. ábrán látható haranggörbe Fourier-transzformáltja maga is egy haranggörbe. Méghozzá — nem lepődünk már meg az ilyesmin — a Δt széles haranggörbéé