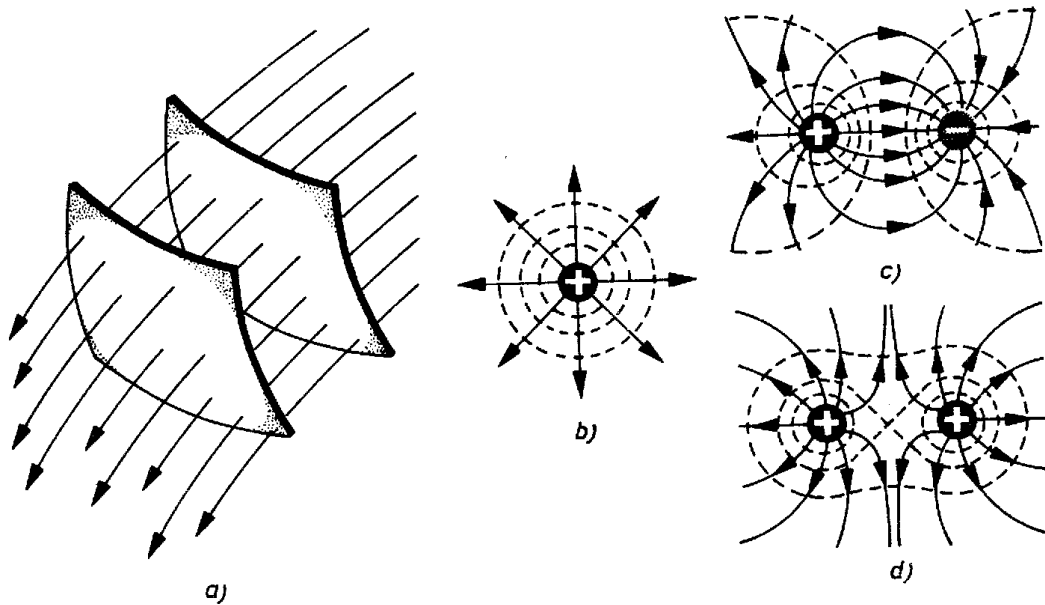


Fejezetek a fizikából

Elektrosztatika, hullámtan és kvantummechanika
biológushallgatóknak

Szilágyi András



Budapest, 2006

Tartalomjegyzék

1. Elektrosztatika	7
1.1. Alapfogalmak	7
1.2. Az elektromos térerősség	7
1.2.1. Elektromos fluxus	8
1.2.2. Gauss-törvény	9
1.2.3. Coulomb-törvény	10
1.2.4. Elektromos potenciál és feszültség	10
1.2.5. A Coulomb-potenciál	13
1.3. Alkalmazások	14
1.3.1. Vezetők és szigetelők elektromos térben, dielektromos állandó	14
1.3.2. Dipólus térereje és potenciálja	14
1.3.3. Végtelen, töltött sík tere	15
1.3.4. Elektromos kettősréteg	16
1.3.5. Kondenzátor és kapacitás	16
1.3.6. Az RC-kör időállandója	17
2. Rezgések és hullámok	19
2.1. A harmonikus rezgés	19
2.1.1. Alapfogalmak	19
2.1.2. A harmonikus rezgés leírása forgóvektorokkal	20
2.1.3. A harmonikus rezgés leírás komplex számokkal	22
2.1.4. A lebegés	22
2.2. Hullámtan	23
2.2.1. Alapfogalmak	23
2.2.2. Hullámok interferencia	24
2.2.3. Interferencia résen, rácson	26
2.2.4. A mikroszkóp felbontóképessége	29
2.2.5. A geometriai optika alapjai	31
3. Kvantummechanika	33
3.1. Klasszikus módon nem magyarázható jelenségek	33
3.1.1. A fény hullámtermészete, a klasszikus kép	33
3.1.2. A fényelektromos jelenség és a fotonhipotézis	33
3.1.3. A fény kettős természete	34
3.1.4. A vonalas színekép	35
3.1.5. A de-Broglie-féle hipotézis	36
3.1.6. A korrespondencia elv	36
3.2. A kvantummechanika elemei	37
3.2.1. A hullámfüggvény	37
3.2.2. A hullámfüggvény és az impulzus	39

3.2.3.	A Heisenberg-féle határozatlansági reláció	39
3.2.4.	A mérés és a határozatlanság	40
3.2.5.	A határozatlansági reláció következményei	42
3.2.6.	Egyszerű kvantummechanikai rendszerek	43
3.2.7.	A hidrogénatom, atomi hullámfüggvények	45
3.2.8.	Milyen a Hold amikor nem nézem?	49
3.2.9.	A részecske–hullám kettősség, sajátállapotok	50
3.2.10.	Schrödinger macskája, a tudat és a hullámfüggvény	50

Előszó

Ez a kis jegyzet fejezeteket mutat be a fizika azon területeiből, melyre egy biológushallgatónak szükséges lehet különböző diszciplínák fizikai alapjainak megértése során. Ezért nem is törekszik – teredelmi korlátai miatt nem is törekedhet – a teljességre. Minden fejezetből csak annyit mutat be, ami a szükséges fizikai kép kialakításához elég és önmagában összefüggő. Bizonyos területek – különösen a kvantummechanika szemlélete – nem könnyű, a klasszikustól eltérő gondolkodásmódot kíván meg. Nem biztos, hogy minden már az első olvasáskor nyilvánvaló lesz, viszont „fair play”-t ígérünk: sehol nem mondjuk azt, hogy „Nyilvánvaló, hogy...” ahol a szóbanforgó dolog bonyolult.

Az érinthető tématerületek nagyságát az elvárható matematikai tudás is korlátozta. Mindenhol csak a szükséges mértékig, a gimnáziumi anyagot sokkal meg nem haladó mértékben használjuk – megkönnyítendő a tanulást, és remélve, hogy így több energia marad a fizikai tartalom megértésére.

Ez a jegyzet nulladik kiadása, így biztosan nem mentes sem az elgépelésektől, sem az esetleges, értelemzavaró részekről. Kérjük, hogy a megtalált hibákat – és a felmerülő ötleteket, véleményeket – a szilagyi@angel.elte.hu elektronikus levélcímen jelezzék, azokat egy későbbi kiadásban figyelembe fogjuk venni. (A esetleges nagyobb megtalált hibák jegyzéke a letöltés helyén olvasható.)

Jó tanulást és eredményes munkát kíván:

a szerző

1. fejezet

Elektrosztatika

1.1. Alapfogalmak

Az elektrosztatika nyugvó elektromos töltések¹ keltette terekkel foglalkozik. Ez a tér, az elektrosztatikus tér, amely más nyugvó töltésekre hat. Ezt a kölcsönhatást elektrosztatikus kölcsönhatásnak nevezzük².

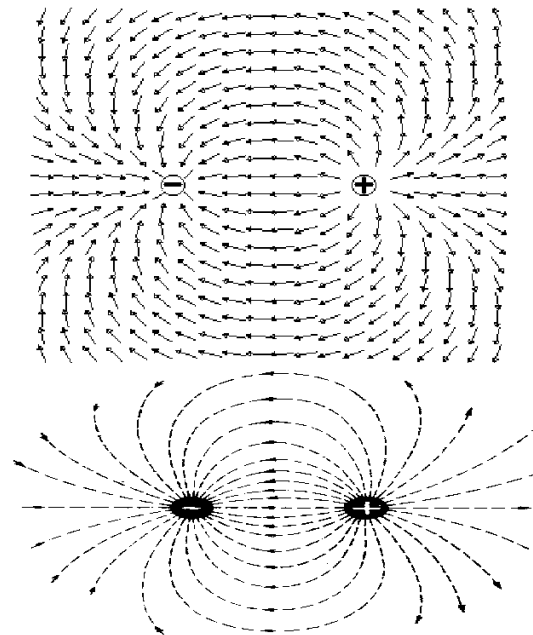
1.2. Az elektromos térerősség

Az elektromos állapotban lévő (elektromosan töltött) test maga körül elektrosztatikus teret kelt, amely tér hat más, nyugvó elektromos töltésekre. Ennek számszerűsítésére bevezethetjük a térerősség fogalmát, mely az egyéni, nyugvó pontszerű pozitív töltésre ható elektrosztatikus erővel egyezik meg:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q}, \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right] = \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (1.1)$$

A tér erőssége akkor $1 \frac{\text{N}}{\text{C}}$, ha 1 C nyugvó töltésre a tér 1 N erőt fejt ki. Mivel az erőnek iránya is van – ahogy az a definícióból is nyilvánvaló – a térerősség vektormennyiség, irá-

nya a fellépő erő irányába mutat. Ezek alapján az elektrosztatikus tér minden egyes pontjába felvehető a térerősség vektor, így kialakul a tér elképzelését megkönnyítő térerővektormező. Ennek a vektormezőnek az érintőhálózata (azaz azok a görbék, melyeknek minden pontjukban érintőjük az adott helyen lévő térerővektor) a térerővonal-, vagy röviden erővonal rendszer, lásd 1.1. ábra.



1.1. ábra. *Térerővektorok és térerővonalak*

A térerővonalaknak nincs fizikai realitásuk, csak a mező elképzelését megkönnyítő matematikai konstrukciók.

A térerővonalak mindig pozitív töltésből indulnak és negatív töltésbe futnak be,

¹A „töltés” szó eredete tudománytörténetileg érdekes. A korai kísérletezők az elektromos mező (töltés) megjelenésekor – több más között – detektálták az apró kisüléseket, szikrákat. Ezeket közös töről vélték eredezni a lőfegyverek torkolattüzével, így a tesztek szikraadásra képes elektromos állapotot olyannak tekintették mint a fegyver töltött állapotát. Innen a „töltés” elnevezés, (vö. angol charge).

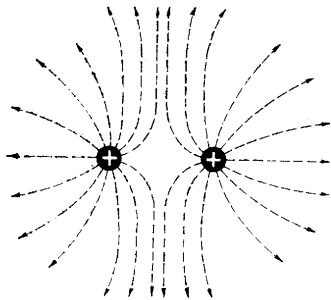
²Ha a töltéshez képest mozgunk, elektromos tere (részben) mágneses térré transzformálódik, ennek tárgyalása nem része a jegyzetnek. Ha a töltésáramlás lassú, akkor jórészt csak elektromos teret érzékelünk, ezek a kvázistatikus terek. A későbbiekben csak (kvázi)statikus terekkel foglalkozunk.

tehát a térerővonal – a fenti megállapodás szerint – a pozitív töltésre ható erő irányába mutat. A fentiek alapján az elektrosztatikus tér egy pontjába helyezett pozitív töltésre az ott lévő erővonal érintőjének irányába mutató erő hat. Negatív töltésre az erő ellentétes irányú.

Az elektromos tér *homogén*, ha minden pontjában azonos nagyságú és irányú a térerősség (ekkor az erővonalak azonos sűrűségű, párhuzamos egyenessereget alkotnak), egyébként a tér inhomogén.

Példa

Rajzoljuk fel egy pontszerű negatív töltés és két azonos nagyságú pontszerű pozitív töltésrendszer (dipólus) erővonalképét – jellegre helyesen.



1.2. ábra. + — + dipólus erővonalképe (A feladat megoldáshoz.)

(*Segítség:* Mivel a ponttöltés tere gömbszimmetrikus, így minden irányból azonos sűrűséggel futnak bele az erővonalak. Ha a töltés nagy, több erővonalat rajzolunk. A dipólus erővonalképének megrajzolásakor az alábbi általános elveket vegyük figyelembe: minden egyes pontba letett pozitív egységtöltésre (a próbatöltésre) két erő hat, ezek iránya a dipólus egyik töltésén és a próbatöltésen átfektetett egyenesen van, és a fellépő erő ott nagyobb, ahol a távolság kisebb. Figyelembe véve még azt, hogy a rendszer szimmetrikus a töltéseket összekötő egyenes felezőmerőlegesére, fel tudunk venni elegendő számú erővonalvektort, majd ezek érintőiként előállnak az erővonalak.)

1.2.1. Elektromos fluxus

Az \mathbf{E} elektromos tér egy adott A nagyságú felületre vett fluxusa, abban az esetben, ha a tér homogén, és az erővonalak merőlegesek a felületre:

$$\Phi = EA, \quad (1.2)$$

azaz a térerősség és a kérdéses felület szorzata.

Ha a tér továbbra is homogén, de a felület nem merőleges a térerősségvektorokra, hanem a felület normálisával α szöveget zár be, akkor a térerővektoroknak csak a felületre merőleges komponense ad járulékot a fluxushoz, azaz a fluxus (lásd 1.3. ábra):

$$\Phi = EA \cos \alpha \quad (1.3)$$

A fenti kifejezést úgy is értelmezhetjük, hogy homogén tér fluxusának számításához csak a felület erővonalakra merőleges vetülete ad járulékot – amint látható a két értelmezés azonos eredményre vezet.

Bevezetve a felület normálvektorát, amelynek nagysága a felület nagyságával egyezik meg, iránya pedig merőleges a felületre, a homogén tér fluxusára egy egyszerűbb alakot kaphatunk. Legyen \mathbf{A} a felület normálvektora, \mathbf{E} pedig a térerősség vektor. Ekkor a fluxus:

$$\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \quad (1.4)$$

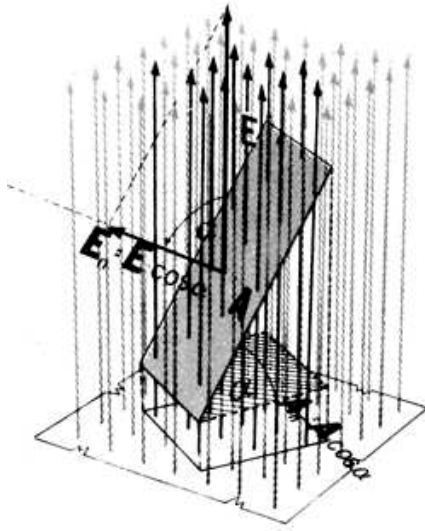
A fluxus mértékegysége a definícióból fakadóan: $[V \cdot m = \text{Weber} = \text{Wb}]$. 1 Wb tehát annak az 1 m^2 -es felületnek a fluxusa, amely az $1 \frac{V}{m}$ nagyságú homogén elektromos térben az erővonalakra merőlegesen áll.

A fluxus jobb megértését segítheti egy áramlási analógia. Tegyük fel, hogy folyadék v sebességgel homogén (lamináris³) módon áramlik. Ekkor ha kiválasztunk az áramlásban egy olyan A méretű sík felületet, amelyen a folyadék merőlegesen áramlik át, akkor az egységnyi idő alatt a felületen átáramló folyadékmennyiség: vA . Ha a felületet megdöntjük, úgy, hogy normálvektora a folyadék sebességével α szöveget zárjon be, akkor az átáramló folyadéktérfogat már csak $vA \cos \alpha$, vagy a felület normálvektorával megadva: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$. Határesetben, ha a felület párhuzamos az áramlási iránnyal (azaz normálvektora merőleges a sebességvektorra) az átáramló mennyiség nulla, a folyadék sebességfluxusa nulla.

Példa

Tekintsünk egy $E = 15 \frac{N}{m}$ nagyságú homogén elektrosztatikus teret. Legyen ebben, egy forgatható 15 cm^2 nagyságú felület, mely először

³Ez azt jelenti, hogy minden folyadékrész sebessége azonos nagyságú és irányú.



1.3. ábra. Homogén tér fluxusának számításához

0° , majd 30° , 60° , 90° -ot zár be az erővonalakkal. Számítsuk ki a fluxust a fenti négy esetben!

Elsőként határozzuk meg a felület normálvektorának és az erővonalaknak a szögét. Ezek rendre: $\alpha = 90^\circ$, 60° , 30° , 0° . Ezek alapján a fluxusok:

$$\Phi_1 = EA \cos 90^\circ = 0 \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = EA \cos 60^\circ = 15 \frac{\text{N}}{\text{m}} 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 0,5 = 0,01125 \text{ Wb}$$

$$\Phi_3 = EA \cos 30^\circ = 15 \frac{\text{N}}{\text{m}} 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,01949 \text{ Wb}$$

$$\Phi_4 = EA \cos 0^\circ = 0,0225 \text{ Wb}$$

Abban az általános esetben, ha a tér inhomogén, a felületet olyan kis $\Delta \mathbf{A}$ felületegységekre (határesetben: felületelemekre, $d\mathbf{A}$) osztjuk, amelyeken a tér már homogénnek tekinthető, és ezekre a fenti módon kiszámítjuk az elemi fluxusokat. A teljes felület fluxusa ezen elemi fluxusok összege:

$$\Phi = \sum_A \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{A} = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.5)$$

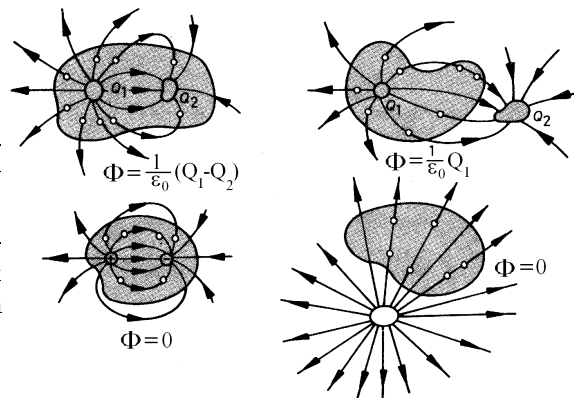
1.2.2. Gauss-törvény

A Gauss-törvény – más néven Maxwell I. törvénye –, az elektrosztatika alapaxiómája, minden további eredmény, amire szükségünk lesz, ebből vezethető le. A törvény kapcsolatot teremt egy zárt felületre vett fluxus és a felületbe bezárt töltésmennyiség között:

$$\Phi = \frac{\sum_V Q}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

ahol $\sum_V Q$ a zárt felület által határolt V térfogatba bezárt összes töltés, míg $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Vm}}$ pedig a „vákuum dielektromos állandója” – az elnevezés magyarázata később.

A törvény megértéséhez nyújt szemléletes segítséget a 1.4. ábra.



1.4. ábra. A Gauss-törvényhez

Figyeljük meg, ha a térfogat nem zár be töltést ($Q = 0$), akkor minden belépő erővonalnak ki kell lépnie – hiszen erővonalak csak töltésen kezdődhetnek illetve végződhetnek –, így a teljes fluxus is nulla (*d.* eset). Ha a bezárt töltések azonos nagyságúak, de ellentétes előjelűek – azaz a nettó töltés zérus, ($\sum_V Q = 0$) –, ugyanannyi erővonal lép *ki* a felületből mint amennyi *belép*⁴, így a felületre vett teljes fluxus nulla (*c.* eset). Ha csak egy töltés van a felületen belül, akkor – a töltés előjelétől függően –, pusztán be- (illetve ki-)lépő erővonalak vannak, így a fluxusból egyértelműen adódik a bezárt töltés (*b.* eset). Ha két töltés

⁴Az erővonalak töltésen kezdődnek és töltésen végződnek, valamint mivel a töltések nagysága azonos, így ugyanannyi indul ki az pozitívba, mint ahány befut a negatívba.

van a felületben, és az egyik töltés nagyobb, mint az ellentétes – azaz a bezárt nettó töltés nem nulla, $(\sum_V Q \neq 0)$ –, több a felületből kifutó (felületbe befutó) erővonal, így a térfogat *nettó* pozitív (negatív) töltése továbbra is egyértelmű kapcsolatban van a felület fluxusával. Több töltésre a fenti megfontolás könnyen általánosítható.

Így a Gauss-törvény szemléletes képe az alábbi:

tetszőleges zárt felület fluxusa egyértelműen meghatározza a felület által határolt térfogatba bezárt töltések előjeles összegét.

Példa

A törvény jobb megértéséhez számoljuk ki a Gauss-törvény segítségével egy Q nagyságú ponttöltés térerőjét tőle R távolságban!

Tekintsünk egy olyan R sugarú gömböt, melynek középpontjában van a töltés. Mivel ez egy töltést körülvevő zárt felület, alkalmazhatjuk a Gauss-törvényt. A fluxus kiszámítása ebben a szimmetrikus helyzetben egyszerű, ugyanis a térerővektorok merőlegesen dőfnek a gömb felületét, és sűrűségük (a gömb felületén) állandó, tehát a homogén esetre alkalmazható (1.2) módon számíthatjuk a fluxust. A gömb felülete: $4R^2\pi$, így

$$\Phi = 4R^2\pi E$$

ahol E a keresett térerősség. A felületbe bezárt töltés Q , így alkalmazva a törvényt:

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

A példa alapján kimondhatjuk, hogy Q nagyságú pontszerű töltés tereje, a töltéstől r távolságban:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (1.7)$$

iránya sugárirányú, valamint pozitív töltésnél a töltésből kifelé, negatív töltés esetén befelé mutat. Az ilyen típusú terek neve: *centrális erőter*.

1.2.3. Coulomb-törvény

Határozzuk meg, hogy egy nyugvó Q töltés mekkora erőt fejt ki egy tőle r távolságban lévő nyugvó Q' töltésre. A (1.7) kifejezés megadja a keltett térerősség nagyságát, míg (1.1) alapján az erő nagysága: $F = EQ'$. Ebből következően:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2}, \quad (1.8)$$

azaz a jól ismert Coulomb-törvényt kapjuk eredményül. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy eddigi kifejezéseink csak *vákuumban* érvényesek, egyéb esetekről a későbbiekben lesz szó!

Példa

A sejtek átlagos méretének nagyságrendje a mikrométeres mérettartományba esik. Számítsuk ki mekkora elektrosztatikus erőt fejt ki $1\mu\text{m}$ távolságból egymásra két elektron.

A Coulomb-törvény alapján:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{(1,6 \cdot 10^{-19}\text{C})^2}{10^{-6}\text{m}^2} = 2,3 \cdot 10^{-22} \text{ N} \quad (1.9)$$

1.2.4. Elektromos potenciál és feszültség

Mivel az elektromos tér a töltésre erőt gyakorol, így – ha a töltés a tér hatására el tud mozdulni – azon munkát is tud végezni. Ebből fakadóan az elektromos térben elhelyezkedő töltésnek – helyzeténél fogva – „elektromos helyzeti energiája” (*potenciális energiája*) van. Ennek az energiának a megadásához – önkényes módon – rögzítenünk kell egy alapszintet (nullszintet), ezen a szinten a töltések energiája nulla. Egy adott Q töltés adott \mathbf{r} pontbeli $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ elektromos potenciális energiája azzal a munkával egyezik meg, amit a mező végez a töltésen, miközben azt a kérdéses pontból a nullszintre viszi.

Az elektrosztatikus tér egy \mathbf{r} pontjának $\phi(\mathbf{r})$ potenciálját ezek alapján az alábbiak szerint definiáljuk:

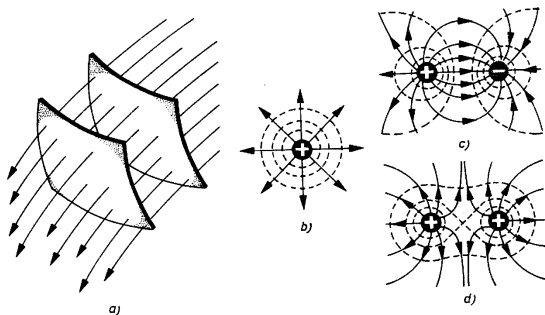
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{r})}{Q}, \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{C}} \right] = [\text{V}] \quad (1.10)$$

Amint látható

az \mathbf{r} pontbeli potenciál mérőszáma a pozitív egységtöltés \mathbf{r} -beli helyzeti energiájának mérőszámával egyezik meg.

Egy elektrosztatikus tér azonos potenciálú pontjai alkotta felületet ekvipotenciális (azonos potenciálú) felületnek nevezzük. Ekvipotenciális felületen mozgó töltésen a mező nem végez munkát, hiszen a töltés potenciális energiája nem változik az elmozdulás során. A mező a legtöbb munkát pedig úgy végzi a töltésen, ha azt az ekvipotenciális felületekre merőlegesen mozgatja. Amint az belátható a tér egy adott pontjában

a térerővektor merőleges az ekvipotenciális felületre.



1.5. ábra. Ekvipotenciális felületek és térerővonalak

Amint láttuk, a potenciál az egységtöltés \mathbf{r} pontbeli helyzeti (potenciális) energiája. (Ha nem egységnyi töltéssel számolunk, osztani kell a töltés mérőszámával.) Ahol a potenciál nagyobb, ott a tér nagyobb munkát végez a töltésen, miközben a nullszintre viszi.

Azonban lehetnek olyan esetek is, hogy a töltést nem akarjuk a nullszintre mozgatni, hanem arra vagyunk kíváncsiak, hogy a mező mekkora munkát végez, miközben a töltést egy másik (nem a nullszinten lévő) \mathbf{r}' pontba viszi. Jelöljük ezt a munkát $W_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$ -vel. Ezek után vezessünk be egy *pontpár*ra jellemző mennyiséget, az \mathbf{r} és \mathbf{r}' pontok közötti *feszültséget*, az alábbi definícióval:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{W_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}}{Q} \quad (1.11)$$

Az \mathbf{r} pontnak az \mathbf{r}' -hez viszonyított feszültsége tehát megadja, hogy a mező mekkora munkát végez az egységnyi pozitív töltésen, miközben \mathbf{r} -ből \mathbf{r}' -be viszi.

A következőkben határozzuk meg a feszültség és a potenciál kapcsolatát. Amint az látható, ha a kérdéses töltést a tér először az \mathbf{r} pontból az \mathbf{r}' pontba viszi, majd az \mathbf{r}' pontból a nullszintre, akkor összesen $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \mathcal{E}(\mathbf{r}')$ munkát végez rajta. Ez a munka természetesen egyenlő azzal, mintha a töltés \mathbf{r} -ből a nullszintre menne, amikor is a munka $\mathcal{E}(\mathbf{r})$. Ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát leosztva a szállított töltés nagyságával, Q -val és átrendezve nyerjük:

$$\frac{W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{Q} = \frac{\mathcal{E}(\mathbf{r})}{Q} - \frac{\mathcal{E}(\mathbf{r}')}{Q} \quad (1.12)$$

Felhasználva a feszültség és a potenciál fenti definícióit, nyerjük:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}'), \quad (1.13)$$

azaz

egy pontpár feszültségén a két pont potenciáljának különbségét értjük.

A feszültség tehát a mezőt pontpáronként jellemzi a munkavégzés szempontjából. Minél nagyobb a feszültség a két pont között, a mező annál nagyobb munkát képes végezni, miközben a töltést átviszi az egyik pontból a másikba.

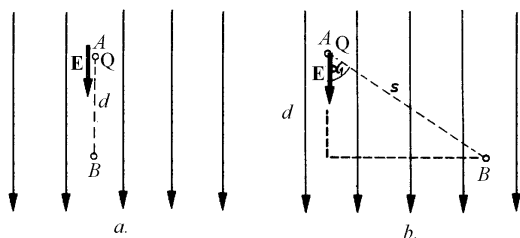
Egyszerű példaként határozzuk meg egy homogén tér két pontjának (A, B) potenciálkülönbségét, azaz az $U(A, B)$ feszültséget. Ha A -ból B -be csak az *erővonalakkal párhuzamosan* kell haladnunk (lásd 1.6. ábra *a.* része), a tér által végzett munka, miközben a Q töltést átáramoltatja:

$$W = Fd = EQd \quad (1.14)$$

ahol d a két pont távolsága. Felhasználva a feszültség (1.11) definícióját, a pontpár közötti feszültséget:

$$U(A, B) = Ed \quad (1.15)$$

Látható tehát, hogy minél nagyobb a térerősség illetve a két pont közötti távolság, annál



1.6. ábra. Homogén térben vett feszültség számításához

nagyobb a feszültség – ha az erővonalakkal párhuzamosan haladunk!⁵

Ha nem az erővonalakkal párhuzamos egyenes mentén haladunk (lásd 1.6. ábra a. része), akkor a töltés útja felbontható az erővonalakkal párhuzamos és arra merőleges összetevőkre. Az erővonalakra merőlegesen haladva (ekvipotenciális felület!) a tér nem végez munkát, tehát a feszültség szempontjából csak a pálya erővonalak irányába eső vetülete számít. A pálya erővonalak irányába eső vetülete $d \cos \alpha$, így a végzett munka:

$$W = EQd \cos \alpha \quad (1.16)$$

ahol α a pálya egyenes és a térerővonalak által bezárt szög. Ezek alapján a két pont közötti feszültség:

$$U(A, B) = Ed \cos \alpha \quad (1.17)$$

A skaláris szorzat bevezetésével a felírás még egyszerűbbé tehető:

$$U(A, B) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \quad (1.18)$$

ahol \mathbf{d} a pálya irányába mutató, d hosszúságú vektor.

Homogén térben, tetszőleges pályagörbe mellett nyilvánvalóan csak a kezdő és végpont távolságának erővonalak irányára való vetülete számít a munkavégzés és így a feszültség tekintetében. Ezek alapján kimondhatjuk, hogy az elektrosztatikus mező *konzervatív*, azaz két pont közötti munkavégzés (vagy

⁵A potenciál kiszámításához le kell rögzítenünk a nullszintet. Legyen ez – az erővonalak irányába eső vetületre nézve – félúton a két pont között. Ekkor az egyik pont potenciálja: $\frac{Ed}{2}$, míg a másiké: $-\frac{Ed}{2}$. A két pont potenciálkülönbsége (feszültsége), mint látható: Ed .

feszültség) szempontjából irreleváns, hogy milyen útvonalon jutunk el az egyik pontból a másikba, hiszen csak a pálya erővonalak irányába eső vetülete lényeges, azt pedig a rögzített két pont egyértelműen megszabja. Ez olyan általános eredmény, mely nem homogén elektrosztatikus mezőkre is igaz!

Példa

Fontos, és az atomfizikában gyakran használatos energiamértékegység az elektronvolt (eV). Ekkora kinetikus energiára tesz szert egy (kezdetben nyugvó) elektron, miközben 1 V potenciálkülönbséget fut be. Határozzuk meg az eV értékét J-ban, valamint az elektron végsebességét!

Az elektronon a tér eU munkát végez, így annak energiája ennyivel növekszik. Tehát

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = \\ &= 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}, \quad (1.19) \end{aligned}$$

azaz számértékét tekintve az elektron töltésével egyezik meg.

Az elektron végsebessége $eU = \frac{1}{2}mv^2$ alapján pedig:

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad (1.20)$$

A következőkben kapcsolatot teremtünk a térerősség és a potenciál között. Homogén elektrosztatikus térben (1.15) és (1.13) alapján ez a kapcsolat egyszerű:

$$\Delta\phi = \phi(B) - \phi(A) = -Ed$$

Amennyiben a tér nem homogén a kapcsolat kicsit bonyolultabb. Élünk azzal az egyszerűsítő feltevessel, hogy a térerősség csak egy adott x irányban változik, jelölésünkkel: $E(x)$. Ekkor, ha csak egy *nagyon kicsi* Δx -szel mozdulok el egy adott pontból, akkor a mező *alig változik*, tehát jó közelítéssel homogénnek tekinthető, így alkalmazható a fenti kifejezés:

$$\Delta\phi = -E(x)\Delta x$$

Természetesen minél kisebb Δx elmozdulásokat teszek, a tér annál inkább tekinthető az adott elmozdulás mellett homogénnek, azaz a

fenti kifejezés annál pontosabb. Határesetben elemi dx elmozdulás alatt a potenciál $\Delta\phi$ -vel változik meg, tehát:

$$E(x) = -\frac{d\phi}{dx}. \quad (1.21)$$

Amint látható a térerősség a potenciál deriváltjának mínusz egyszerese. Szemléletes jelentése a kifejezésnek az, hogy

ahol a potenciál gyorsabban változik, ott nagyobb a térerősség.

Általános pályagörbe és a hellyel változó elektromos térerősség ($\mathbf{E}(\mathbf{r})$) esetén a feszültség kiszámításához a teret olyan kis $d\mathbf{r}$ darabokon kell tekinteni, ahol homogénnek tekinthető, és itt kell képezni az elemi elmozdulás és a térerősség skalárszorzatát: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$. A teljes munka ezen elemi elmozdulások összege (integrálja) a két pont között, tehát a feszültség:

$$U(A, B) = \int_A^B \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (1.22)$$

A fenti kifejezés kimondja, hogy a két pont közötti feszültség a térerősség út szerinti integrálja a két pont közötti tetszőleges útvonalon.

1.2.5. A Coulomb-potenciál

Egy ponttöltés által keltett tér egyszerűsége és referencia-eset volta miatt is további vizsgálódásra tarthat számot. A tér erősségét már kiszámoltuk, ennek eredménye (1.7) alapján:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (1.23)$$

volt. Ennek a térnek a neve: Coulomb-tér jellegét tekintve centrális erőtér. A következőkben megadjuk a Coulomb-tér potenciálját és feszültségét.

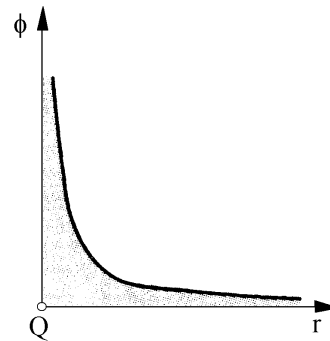
A Coulomb-tér potenciáljának számításához elsőként rögzíteni kell a tér nullszintjét. Ezt célszerűségi okokból a ponttöltéstől végtelen távolra választjuk – tehát a teret keltő ponttöltéstől végtelen távol elhelyezkedő próbatöltés potenciális energiáját tekintjük nullának. Amint az belátható – lásd az alfejezet végén az apróbetűs részt – ebben az esetben a Q ponttöltés potenciálja (vákuumban) a töltéstől r távolságban:

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (1.24)$$

A fenti kifejezés igazolása az alábbiak szerint lehetséges. Amint az látható csak egy paramétertől (a középponttól való távolságtól (r)) függ. Így használható a (1.21)

kifejezés, és látható, hogy (1.24) deriváltjának mínusz egyszerese éppen a (1.23).

Mivel a potenciál a távolságtól $\frac{1}{r}$ -szerint függ, így a töltéshez közeledve a potenciál folyamatosan növekszik, és a végtelenhez tart. Ennek oka abban keresendő, hogy a teret keltő *pontszerű* töltéshez a *pontszerű* próbatöltést tetszőlegesen közel lehet vinni ($r \rightarrow 0$), ekkor azonban a fellépő Coulomb-erő (lásd (1.8)) és így a potenciál is a végtelenhez tart. A végtelenbe távolodva ($r \rightarrow \infty$) pedig a potenciál – a fent kiszabott feltétellel összhangban – a nullához tart, lásd 1.7. ábra.



1.7. ábra. *Coulomb-potenciál*

A következőkben megadjuk a Coulomb-tér két pontja közötti feszültséget. Ekkor csak a két pont töltéstől mért távolsága (r_A , r_B) számít, azok egymáshoz képesti helyzete lényegtelen. Ennek oka abban keresendő, hogy a Coulomb-tér gömbszimmetrikus, így ekvipotenciális felületei gömbfelületek (lásd 1.5. ábra *b.* része), tehát a feszültség meghatározásakor (amely a potenciálok különbsége) csak az számít, hogy az egyik illetve a másik pont milyen sugarú ekvipotenciális gömbfelületen helyezkedik el. Így a fenti potenciálképlet alapján a Coulomb-tér egy A és B pontja közötti feszültség:

$$U_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (1.25)$$

1.3. Alkalmazások

1.3.1. Vezetők és szigetelők elektromos térben, dielektromos állandó

Vezetőnek nevezzük azokat az anyagokat, melyek töltései külső tér hatására könnyen elmozdulnak, szigetelőknak azokat, melyek töltései helyhez kötöttek. Elektrosztatikus térbe helyezett vezető pozitív és negatív töltéseire ellentétes irányú erőt fejt ki a tér, így a vezető átellenes *felületelemein* ellentétes töltések halmozódnak fel. Ez a töltésfelhalmozódás addig folytatódik, míg a rájuk ható erő meg nem szűnik. Az elektrosztatikus erő megszűnésének az az oka, hogy a szétválasztott és a felületen felhalmozott töltések olyan saját teret hoznak létre, amely az eredeti térhez hozzáadódva lerontja azt, és a fémbe behatoló mezőt kioltja. Mivel a töltésszétválás addig folyik, amíg az eredő tér a vezetőn belül nem lesz nulla, így amikor a külső és a szétválasztott töltésektől származó tér teljesen lerontotta egymást, megáll a további töltésszétválás (lásd 1.8. ábra). Tehát

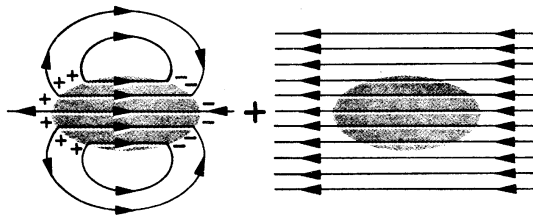
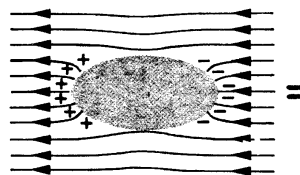
egyensúlyi esetben elektrosztatikus térbe helyezett fémek (vezetők) belsejében nincs elektromos tér.

Mivel a fémek belsejében nincs elektrosztatikus tér ($\mathbf{E} = 0$), így tetszőleges, a fémbe felvett zárt felület fluxusa is nulla: $\Phi_{\text{fémbe}} = 0$. Ebből, az (1.6) Gauss-törvény alapján következik, hogy vezető belsejében az össztöltés nulla.

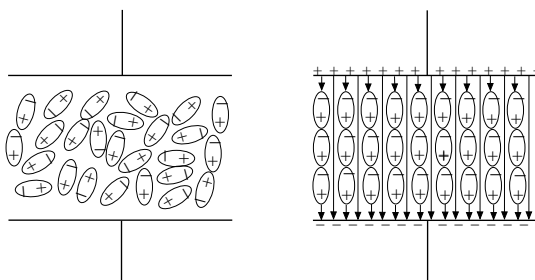
Szigetelők töltései nem mozdulnak el, de a külső tér hatására az anyag alkotói többékevésbé polarizálódnak (vagy már tér nélkül is polárosak), és így mint dipólusok a tér megfelelő irányába fordulnak, lásd 1.9. ábra. Ennek következményeként a szigetelő *belsejében* bármely makroszkopikus térfogat össztöltése továbbra is nulla marad, azonban a *felületen* indukált töltések jelennek meg. A külső tér erővonalainak egy része ezeken az indukált töltéseken végződik, – illetve a szigetelő átellenes oldalán indul –, tehát

a szigetelőkön belül lecsökken a térerősség.

Annak a jellemzésére, hogy a szigetelőben a vákuumhoz képest hányad részére csökken



1.8. ábra. Vezető elektromos térben



1.9. ábra. Szigetelő elektromos térben

a térerősség, bevezetjük a relatív dielektromos állandó (ϵ_r) fogalmát, ez a vákuumban és az adott anyagban mért térerősség hányadosa:

$$\epsilon_r = \frac{E_{\text{vákuum}}}{E_{\text{szigetelő}}} \quad (1.26)$$

1.3.2. Dipólus térereje és potenciálja

Az elektromos dipólus egy pozitív ponttöltésből ($+Q$) és egy ugyanolyan nagyságú negatív ponttöltésből ($-Q$) áll. A két töltés l távolsága legyen kicsi a problémában előforduló egyéb távolságokhoz képest. A dipólus momentumán (nyomatékán) az

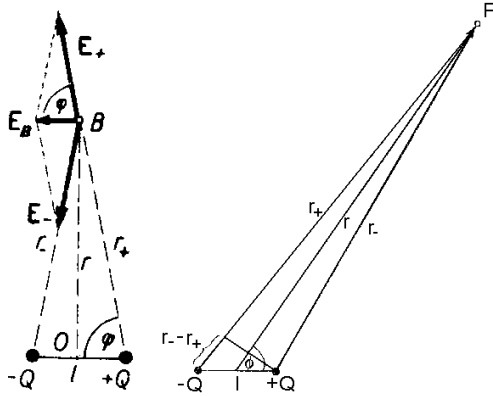
$$m = Ql \quad (1.27)$$

szorzatot értjük.

Az elektromos dipólus fogalmának célszerűsége – többek között – abból származik, hogy vele bonyolult töltérendszer helyettesíthető. Ugyanis egy sok töltésből álló rendszer pozitív és negatív töltéseinek meghatározhatjuk a súlypontját, ugyanúgy ahogy az a mechanikában a súlypont meghatározásánál lehetséges, azonban itt tömegek helyett a töltésekkel súlyozzuk a távolságokat. Ilyen módon egy tetszőlegesen bonyolult töltérendszernek előáll a pozitív és negatív töltés-súlypontja, és így a

töltésrendszer – ha ez a két pont nem esik egybe – dipólusnak tekinthető, és sok esetben ezzel helyettesíthető.

Határozzuk meg egy dipólus keltette elektromos teret a dipólus felezőmerőlegesen, a felezőponttól r távolságban, lásd 1.10. ábra bal oldali részábrája.



1.10. ábra. Dipólus térereje és potenciálja

Használjuk ki, hogy $r_+ = r_- \approx r \gg l$. A keresett B pontban a térerősség iránya az ábrán látható, nagysága pedig:

$$\begin{aligned} E_B &= 2E_+ \cos \phi = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_+^2} \cos \phi = \\ &= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_+^2} \frac{l/2}{r_+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ql}{[r^2 + (l/2)^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Mivel $Ql = m$ valamint r^2 mellett $(l/2)^2$ elhanyagolható, így a dipólus térereje:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{r^3}. \quad (1.29)$$

Ebből látható, hogy míg a ponttöltés térereje négyzetesen csökken, addig a dipólus tere ennél gyorsabban, a távolság harmadik hatványával. (Belátható, hogy nem csak ezen a speciális helyen, hanem bárhol a térben – természetesen a dipólus méretéhez képest nagy távolságban – a térerő a távolság harmadik hatványával csökken.)

A következőkben határozzuk meg a dipólus potenciálját egy, a tengelyével ϑ szöget bezáró irányban, tőle nagy távolságban (lásd 1.10. ábra jobb oldala). A kérdéses P pontban a két ponttöltés keltette potenciál összege van jelen:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{r_- - r_+}{r_- r_+} \quad (1.30)$$

Az előzőekhez hasonlóan, felhasználva, hogy r_+ és r_- nagy az l -hez képest, kapjuk:

$$\phi = \frac{l \cos \vartheta}{r^2} \quad (1.31)$$

Amint itt is megfigyelhető, a ponttöltés potenciáljának $\frac{1}{r}$ -es távolságfüggésénél gyorsabban (négyzetesen) csökken a potenciál.

Példa

Határozzuk meg a dipólus tengelyében, attól nagy távolságban a térerősséget!

A dipólus tengelyében, annak középpontjától $r \gg l$ távolságban vizsgáljuk a teret. Ennek nagysága:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{1}{[r - l/2]^2} - \frac{1}{[r + l/2]^2} \right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

ahol r_+ jelöli a + töltés és a kérdéses pont távolságát (ez a pont van közelebb a vizsgált ponthoz), r_- pedig a - töltés távolságát jelzi. Négyzetre emelve, és minden l^2 -es tagot elhanyagolva az alábbi kifejezést nyerjük:

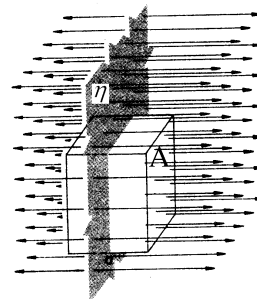
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2m}{r^3}. \quad (1.33)$$

Ez összhangban korábbi megállapításainkkal, miszerint a dipólus térereje – nagy távolságokban – a távolsággal köbösen csökken.

1.3.3. Végtelen, töltött sík tere

Tekintsünk egy végtelen síkot $\eta \frac{C}{m^2}$ felületi töltéssűrűséggel. Ez azt jelenti, hogy a sík minden négyzetméterén egyenletesen η Coulomb töltés helyezkedik el. Vegyünk egy négyzetes hasábot, amelynek alapterülete A és amelynek a palástja merőlegesen megy át a felületen, lásd 1.11. ábra. A felület egy A területű körlapja van a hengeren belül, itt $Q = \eta A$ töltés van. Az elektromos tér csak a henger két alaplajján megy át, és ott merőlegesen. Ezek összfelülete $2A$, a rajtuk keresztülmennő elektromos fluxus tehát (1.6) alapján:

$$\Phi = \frac{\eta A}{\epsilon_0} \quad (1.34)$$



1.11. ábra. Végtelen töltött sík terének számításához

Az elektromos tér pedig (1.2) figyelembe vételével:

$$E = \frac{\Phi}{2A} = \frac{\eta A}{2\epsilon_0 A} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \quad (1.35)$$

Mint látható, a nyert eredmény szerint

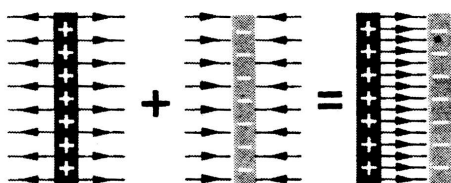
a végtelen töltött sík által keltett térerősség független a síktól vett távolságtól!

A „végtelen sík” természetesen idealizáció, a valóságban ilyen nincs. Ennek az idealizációnak akkor van értelme, ha olyan közel vagyunk a felülethez, amihez képest a felület határai már nagyon messze vannak. Ekkor nincs jelentősége, hogy véges, vagy végtelen a sík. Ebben a *határesetben* igaz, hogy a térerősség független a síktól mért távolságtól.

1.3.4. Elektromos kettősréteg

Vegyünk két párhuzamos, végtelen síkot, egymástól d távolságra. Tegyük az egyikre η , a másikra $-\eta$ felületi töltéssűrűséget, a két sík össztöltése tehát zérus. Ekkor a síkokon kívüli részben a két töltött sík elektromos tere kimentja egymást, a térerősség tehát nulla. A két sík között viszont a két térerősség összeadódik, így az elektromos tér az egyetlen töltött sík terének a kétszerese (lásd 1.12. ábra), azaz (1.35) alapján:

$$E = \frac{\eta}{\epsilon_0} \quad (1.36)$$



1.12. ábra. *Elektromos kettősréteg tere*

(1.13), (1.10) és (1.36) felhasználásával a két sík közötti potenciálkülönbség, azaz feszültség:

$$U = \Delta\Phi = Ed = \frac{\eta}{\epsilon_0} d \quad (1.37)$$

E szerint

a potenciál a két sík között lineárisan változik, a síkokon kívül pedig állandó.

Az elektromos térbe helyezett dielektrikumokról elmondottak alapján vizsgáljuk meg, hogyan változik a fenti eredmény amennyiben a két sík közötti teret nem vákuum, hanem valamilyen szigetelő anyag (dielektrikum) tölti ki. A (1.26) kifejezés szerint dielektrikum hatására a térerősség ϵ_r részére csökken, így a fenti két kifejezés az alábbiak szerint módosul:

$$E = \frac{\eta}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (1.38)$$

$$U = \frac{\eta}{\epsilon_0 \epsilon_r} d$$

Ezek alapján lesz nyilvánvaló a „vákuum dielektromos állandója” elnevezés oka. Ugyanis ha nem „anyag”, hanem vákuum tölti ki a teret, akkor az arányossági tényező ϵ_0 . Természetesen itt nem arról van szó, hogy ez a tényező a „vákuum polarizálhatóságát” méri, hanem pusztán a használt mértékegység-rendszer teszi szükségessé. Más mértékegységrendszerekben értéke más és más⁶. Ami viszont valódi fizikai jellemzőt az meg, az a kérdéses dielektrikum relatív dielektromos állandója (ϵ_r), amely az anyagra jellemző érték, és az anyagon belüli térerőcsökkenés mértékét méri – természetesen mértékegységrendszer-függetlenül.

1.3.5. Kondenzátor és kapacitás

Két párhuzamosan elhelyezkedő vezető lap, melyeknek töltése azonos nagyságú és ellentétes előjelű, sikkondenzátort alkot⁷. A kondenzátor (vagy régi nevén sűrítő) töltések tárolására alkalmas. Annál jobb, minél nagyobb töltést minél kisebb potenciális energián tud tárolni, azaz a két lapja (fegyverzete) között minél kisebb feszültség alakul ki a töltések felvitele után. Ezt a tulajdonságot a kondenzátor kapacitásának nevezzük:

$$C = \frac{Q}{U} \quad (1.39)$$

⁶ Ahogyan más mértékrendszerekben a töltésnek, feszültségnek, kapacitásnak... is mások az egységei.

⁷ Természetesen más geometriájú kondenzátorok is vannak (gömb, henger, ...), mi az egyszerűség kedvéért a sikkondenzátort mutatjuk be.

Ha a kondenzátor párhuzamos, d távolságban lévő lemezein Q töltés van, akkor közöttük homogén tér alakul ki, így a feszültség (1.13) alapján:

$$U = Ed \quad (1.40)$$

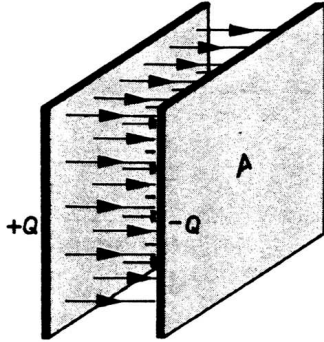
A Gauss-tétel (1.6) valamint a mező homogenitásának (1.2) felhasználásával, feltéve, hogy a lemezek közötti teret ϵ_r dielektromos állandójú dielektrikum tölti ki:

$$EA = \Phi = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (1.41)$$

A fenti egyenletek összevetéséből a síkkondenzátor kapacitása:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (1.42)$$

A kapacitás mértékegysége: $[\frac{C}{V}] = [F]$, a farád. Ez hatalmas egység, a gyakorlati életben μF , nF , pF nagyságrendek fordulnak elő.

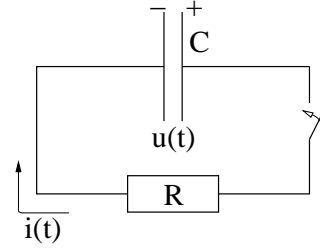


1.13. ábra. Kondenzátor

Látható, hogy a kapacitás növelése a lemezek felületének növelésével, a távolság csökkenésével, valamint nagyobb dielektromos állandójú anyaggal való kitöltéssel lehet.

1.3.6. Az RC-kör időállandója

Tekintsük az alábbi egyszerű hálózatot. Legyen egy U_0 feszültségre feltöltött C kapacitású kondenzátor egy kapcsolón keresztül sorba kötve egy R ellenállással. Vizsgáljuk meg, hogy a kapcsoló zárása után hogyan csökken a kondenzátor feszültsége az idő függvényében.



1.14. ábra. Egy RC-kör

Amint nyilvánvaló – a körben nincs feszültségforrás –, az áramkör egyes elemein fellépő feszültségesések összege nulla:

$$u_C(t) + u_R(t) = 0.$$

Az ellenálláson eső feszültség:

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = R \frac{dQ(t)}{dt},$$

míg a kondenzátor feszültsége:

$$u_C = \frac{Q(t)}{C}.$$

Ebből fakadóan:

$$R \frac{dQ(t)}{dt} R + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (1.43)$$

Ennek a differenciálegyenletnek keressük a megoldását a $Q(0) = CU_0$ kezdeti feltétellel. Mint arról visszahelyettesítéssel egyszerűen meg lehet győződni: $Q(t) = CU_0 e^{-t/RC}$ a kezdeti feltételnek eleget tevő megoldás. Azaz a kondenzátor feszültsége ($u_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$) és árama ($i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$) az alábbiak szerint alakul:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_0 e^{-t/\tau} \\ i(t) &= -\frac{U_0}{R} e^{-t/\tau} \end{aligned} \quad (1.44)$$

ahol $\tau = RC$ a kör időállandója. Mint látható a kisülés folyamán a kondenzátor feszültsége és a körben folyó áram exponenciálisan csökken, az időállandó alatt pontosan e -ad részére. $C = 1 \mu F$ és $R = 1 \Omega$ esetén $\tau = 1 \mu s$, de $R = 10^7 \Omega$ esetén már $\tau = 10$ s.

2. fejezet

Rezgések és hullámok

2.1. A harmonikus rezgés

róbetűs részt –:

2.1.1. Alapfogalmak

A harmonikus rezgőmozgás (a harmonikus oszcillátor) a fizika egyik legalapvetőbb mozgástípusa – amely azon kevés dinamikai problémák közé tartozik, melyet a kvantummechanika keretein belül is egzaktan lehet tárgyalni. Ez az a mozgás, melyet olyan külső erő hoz létre, melynek iránya a rezgést végző test kitérésével ellentétes, nagysága pedig az egyensúlyi ponttól vett távolsággal arányos. Ilyen erőt hoz létre – nem túl nagy megnyúlások esetén – egy rugó. A harmonikus erő kifejezése tehát:

$$F_{\text{harm}} = -Dx \quad (2.1)$$

ahol $D, \left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$ a direkción állandó, mely megmutatja, hogy az egyensúlyi helyzettől való kitérés következtében mekkora visszairányító erő jön létre, míg $x, [\text{m}]$ az egyensúlyi helyzettől mért kitérés. A „-” előjel utal arra, hogy az erő a kitéréssel ellentétes irányú, visszafelé irányít.

A fentiek alapján harmonikus rezgőmozgást végez egy rugóra akasztott, kitérített és magárahagyott test. (Itt természetesen eltekintünk a rugó belső súrlódásától, légellenállástól és az egyéb disszipatív erőktől, melyek hatásaként csillapított rezgőmozgás jön létre. Ha a rugó nem lineáris, azaz nem pontosan követi a fenti erő kifejezést, akkor anharmonikus rezgőmozgásról beszélhetünk) Ekkor a test mozgását leíró Newton-egyenlet az alábbi alakú:

$$ma = -Dx \quad (2.2)$$

Ennek megoldása – a bizonyításért lásd az ap-

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (2.3)$$

ahol $A, [\text{m}]$ a rezgés amplitúdója, tágassága, azaz az egyensúlyi pont és a maximális kitérés távolsága.

$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}, [\text{s}^{-1}]$ a körfrekvencia – az elnevezés oka és kapcsolata a további mennyiségekkel a következő fejezetben válik nyilvánvalóvá. Amint látható, és hétköznapi tapasztalatainkból is tudjuk, merevebb, nagyobb rugalmassági állandójú rendszerek (saját) körfrekvenciája nagyobb – a hang gyorsabban terjed acélban, mint levegőben.

ϕ_0 a kezdőfázis, melyet itt csak a konceptuális teljesség kedvéért vezetünk be. Ennek értéke az időmérés kezdetének alkalmas megválasztásával nullává tehető, ha értéke nem nulla (illetve nem $k \cdot 2\pi$), akkor a rezgést végző testnek a $t = 0$ időpillanatban van kitérése.

Mint az elemi megfontolásokkal – lásd a 2.1 ábrát vagy az apróbetűs részt – belátható a harmonikus rezgést végző test sebessége és gyorsulása:

$$\begin{aligned} v(t) &= A\omega \cos(\omega t + \phi_0) \\ a(t) &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi_0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

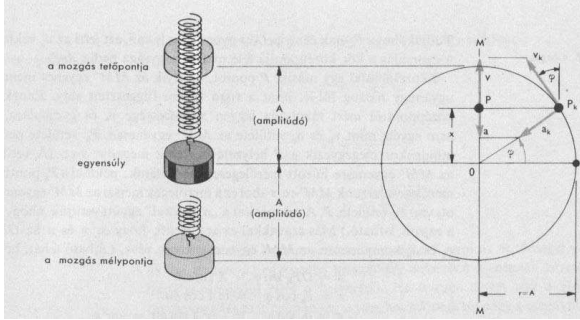
A rezgés periódusideje az egy teljes rezgés megtételéhez szükséges idő: $T, [\text{s}]$.

Ennek reciproka, az egységnyi idő alatt megtett rezgések száma, a frekvencia: $\nu, [\text{s}^{-1} = \text{Hz}]$.

A rezgés fázisa a szinuszfüggvény argumentuma,

azaz $\omega t + \phi_0$. Ez mutatja meg, hogy a teljes rezgésen belül „hol járunk” – figyelembe véve,

hogy a mozgás 2π periódikus. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a rezgés fázisához 2π -t tetszőlegesen sokszor hozzáadhatok–levonhatok, ez a mozgásjellemzőket (sebesség, kitérés gyorsulás) értékét nem változtatja meg. Mint látható ez a periódikusság ismérve. A mozgás jellemzőit mutatja be a 2.1. ábra.



2.1. ábra. A harmonikus rezgőmozgás jellemzői és kapcsolata a körmozgással

Példa

Tekintsük az alábbi paraméterű harmonikus rezgőmozgást: $A = 5$ cm, $\omega = 10 \frac{1}{s}$. Tegyük fel, hogy a rezgő testnek az időmérés kezdetekor ($t = 0$ -ban) éppen az egyensúlyi pontban van, azaz 0 a kitérése. Amint látható emiatt $\phi_0 = 0$. Határozzuk meg, hogy mikor lesz a kitérése $x_1 = 2,5$ cm illetve $x_2 = 5$ cm, valamint mekkora T időközökkel veszi fel újra a kezdeti helyzetét!

$$x_1 = A \sin(\omega t_1)$$

$$2,5 \text{ cm} = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(10 \frac{1}{s} \cdot t_1\right)$$

Ebből nyerjük, hogy $t_1 = \frac{\pi}{60}$ s.

Hasonlóan

$$x_2 = A \sin(\omega t_2)$$

$$5 = \sin\left(10 \frac{1}{s} \cdot t_2\right),$$

azaz $t_2 = \frac{\pi}{20}$ s. (Mint látható a kifejezések nem lineárisak, azaz $2t_1 \neq t_2$.) Végezetül határozzuk meg – általánosan –, hogy mekkora az az idő, ami alatt visszatér kezdeti állapotába (periódusidő). Ekkor a kitérés éppen az

amplitúdó lesz, tehát

$$A = A \sin(\omega T)$$

$$\frac{\pi}{2} = \omega T$$

azaz $T = \frac{\pi}{2\omega}$. Ezzel kapcsolatot is teremtettünk a körfrekvencia és a periódusidő között:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.5)$$

A (2.3), (2.4) kifejezések igazolása. Tekintve véve, hogy $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, így a harmonikus oszcillátor Newton-egyenlete, az alábbi differenciálegyenlet:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx \quad (2.6)$$

Ennek általános megoldása – mint arról visszahelyettesítéssel meggyőződhetünk –:

$$x(t) = B \sin \omega t + C \cos \omega t. \quad (2.7)$$

B és C konstansok helyett vezessük be A -t és ϕ -t, az alábbi definíció szerint: $A \cos \phi_0 = B$ és $A \sin \phi_0 = C$. Ekkor $-\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ addíciós tétel felhasználásával – a megoldás az alábbi alakot ölti:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0). \quad (2.8)$$

Idő szerint egyszer illetve kétszer deriválva a fenti kitérés-idő függvényt nyerjük a (2.4)-ben bemutatott sebesség- illetve gyorsulás kifejezéseket.

2.1.2. A harmonikus rezgés leírása forgóvektorokkal

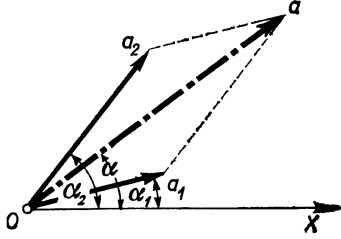
A harmonikus rezgés és a körmozgás közötti analógiát felhasználva egy alternatív leírási módot nyerünk. Mint ismeretes, az egyenletes, ω szögsebességű körmozgást végző test körmozgásának síkjára való vetülete harmonikus rezgőmozgást végez, lásd 2.1. ábra. Ennek a harmonikus rezgőmozgásnak az amplitúdója éppen a körpálya sugara, körfrekvenciája a körmozgás szögsebességével egyezik meg, fázisa pedig a körmozgás szögelfordulásával azonosítható.

Ezek alapján

egyenletes körmozgással forgó vektor végpontjának a vetülete¹ harmonikus rezgést végez.

A vektor hossza a rezgés amplitúdója, szögsebessége pedig a körfrekvenciája. Ez az úgynevezett forgóvektoros leírási mód.

¹Természetesen a körpálya síkjára merőleges vetületet vizsgáljuk.



2.2. ábra. Két egyirányú és azonos frekvenciájú rezgés összedása forgóvektorokkal

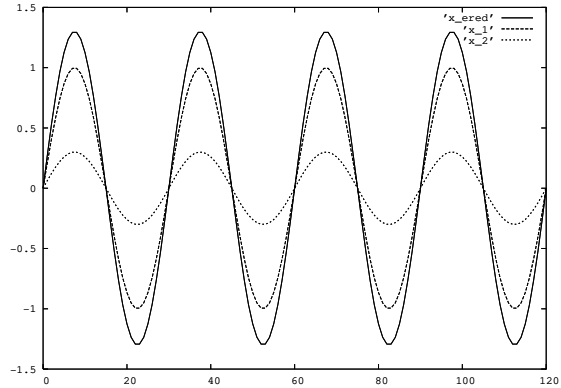
A módszer alkalmazásaként határozzuk meg két egyirányú, azonos ω körfrekvenciájú, A_1 és A_2 amplitúdójú, valamint α_1 és α_2 kezdőfázisú harmonikus rezgés összegét! A két rezgés összege – amint azt látni fogjuk – egy szintén ω körfrekvenciájú, A amplitúdójú és α kezdőfázisú harmonikus rezgés lesz. Mérjük az első rezgést reprezentáló, A_1 hosszú vektort a sík valamely egyenesével α_1 szöget bezárólag, valamint ugyanabból a kezdőpontból a második rezgést jelentő A_2 hosszú, az egyenessel α_2 szöget bezáró vektort. E két vektor által bezárt szög: $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ időben nem változik, hiszen a két vektor ugyanakkora ω szögsebességgel „forog”. A két vektor vektoriális összege határozza meg az eredő rezgés paramétereit. Mint az a koszinusztételből rövid számolás után adódik, az eredővektor hossza, azaz az eredő rezgés amplitúdója:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (2.9)$$

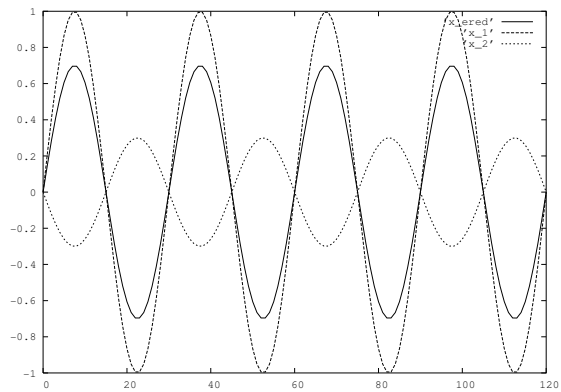
A vektor szöge, azaz a kialakuló rezgés kezdőfázisa:

$$\tan \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (2.10)$$

Mint látható, ha a fázisok megegyeznek ($\alpha_1 = \alpha_2$) – más szóval, ha a rezgések azonos fázisban vannak –, az őket reprezentáló vektorok azonos irányba mutatnak – az amplitúdók összedódnak: $A = A_1 + A_2$, ez az ún. erősítés. Ha a rezgések ellenfázisban vannak – a reprezentáló vektorok ellentétes irányba mutatnak –, azaz $(\alpha_2 - \alpha_1 = \pi)$ az amplitúdók kivonódnak: $A = A_1 - A_1$, ez a gyengítés. A gyengítés speciális esete a kioltás, ez akkor következik be, ha az összetevők amplitúdói megegyeznek, lásd 2.3. és 2.4. ábra.



2.3. ábra. Egyirányú, azonos fázisú rezgések összetétele



2.4. ábra. Egyirányú, ellentétes fázisú rezgések összetétele

A forgóvektoros módszer célszerűségét bemutató megmutatandó meghatározzuk a két rezgés összegét algebrai úton is. Az eredő rezgés

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \quad (2.11)$$

Egyszerű átalakítások után:

$$x = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) \cos \omega t \quad (2.12)$$

Használjuk fel, hogy $A \sin(\omega t + \alpha) = A \cos \alpha \sin \omega t + A \sin \alpha \cos \omega t$, és válasszuk meg A -t és ϕ -t úgy, hogy a fenti két kifejezés azonos legyen. Ez akkor teljesül, ha $A \cos \alpha = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2$ valamint $A \sin \alpha = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2$. E két egyenletet négyzetre emelve és összeadva, valamint elosztva egymással nyerjük:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (2.13)$$

$$\tan \phi = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}, \quad (2.14)$$

ami megegyezik a fentivel. Mint látható ez a módszer bizonylatlanul vezet eredményre

Példa

Tekintsünk két azonos frekvenciájú, egyirányú rezgést. Egyik amplitúdója legyen $A_1 = 5$ cm, a másiké $A_2 = 3$ cm. Határozzuk meg az eredő rezgés amplitúdóját, ha a két összetevő rezgés fáziskülönbsége $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

Amint az egyszerű számítással adódik, az eredők $A=8$ cm, 7,43 cm, 2 cm.

2.1.3. A harmonikus rezgés leírás komplex számokkal

A harmonikus rezgések leírásának e módszere a komplex számokat veszi igénybe a rezgés reprezentálásához. Amint az a komplex számok elemi matematikájából ismert a trigonometrikus és exponenciális függvények között az Euler-féle összefüggés teremt kapcsolatot²:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad (2.15)$$

Mint látható a képzetes kitevőjű exponenciális függvény képzetes része éppen a szinuszos tag, tehát a harmonikus rezgés kitérés-idő függvénye (2.3) az alábbi alakban – a komplex számok úgynevezett exponenciális alakjában – is írható:

$$\operatorname{Im} \left(Ae^{i(\omega t + \phi_0)} \right) = A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (2.16)$$

ahol Im jelenti a mögötte álló kifejezés komplex részét. Ha az $Ae^{i(\omega t + \phi_0)}$ kifejezést a komplex síkon ábrázoljuk, akkor egy A hosszú, a valós tengellyel $\omega t + \phi_0$ szöget bezáró vektort kapunk. Ennek – az ω szögsebességgel forgó vektornak – a képzetes tengelyre való vetülete a (2.16) által meghatározott kifejezés, amely éppen a harmonikus rezgőmozgás leírója, ahogyan azt a harmonikus és a körmozgás kapcsolatát tárgyaló részben bemutattuk.

2.1.4. A lebegés

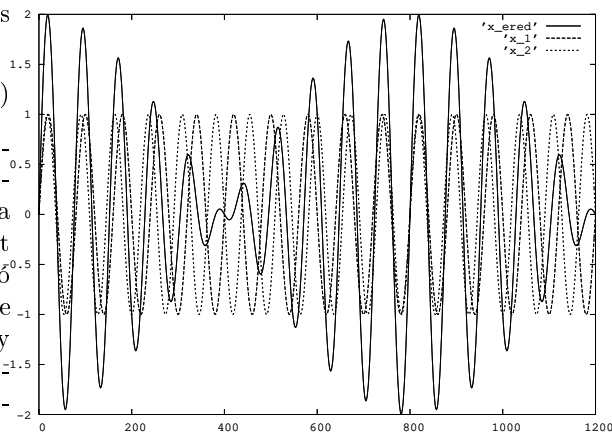
A lebegés jelensége akkor jön létre, ha két egyirányú, közel azonos frekvenciájú rezgést adunk össze. Ebben az esetben a korábban megismert összegzési eljárás nem alkalmazható, mert a két rezgés frekvenciája nem egyezik meg, azonban a forgóvektoros módszerrel szemléletesen kaphatunk kvalitatív eredményt.

² x lehet komplex szám is, itt azonban $x \in \mathbb{R}$.

Legyen az egyszerűség kedvéért a két összeadandó rezgés amplitúdója azonos (A), míg körfrekvenciájuk közel azonos: $\omega_1 \approx \omega_2$. A forgóvektoros kép szerint a két rezgés összegének amplitúdója függ a két komponens által bezárt δ szögtől, lásd 2.2. ábra. Mivel a két körfrekvencia nem pontosan egyezik meg, így az egyik gyorsabban forog, tehát a két vektor által bezárt szög az időben lassan változik. Így időben periódikus módon létrejön a teljes erősítés (mikor $\delta = 0$), majd pedig δ növekedtével kisebb méretű erősítés, gyengítés, végül – mivel az amplitúdók azonosak – a kioltás ($\delta = \pi$ esetén), majd pedig előlről kezdődik a ciklus. Tehát az eredő rezgés amplitúdója az időben lassan változik 0 és $2A$ között.

A lebegés jelensége tehát időben folyamatosan változó erősítés-gyengítés-kioltás,

amint ezt a 2.5. ábra bemutatja. Amennyiben a két összetevő-rezgés frekvenciájának különbsége kicsi, a lebegés frekvenciája kicsi lesz, míg, ha a frekvenciák különbségét növeljük, a lebegés frekvenciája növekszik.



2.5. ábra. A lebegés jelensége

A pontos számítások az alábbi eredményre vezetnek. Az eredő rezgés

$$x = A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t. \quad (2.17)$$

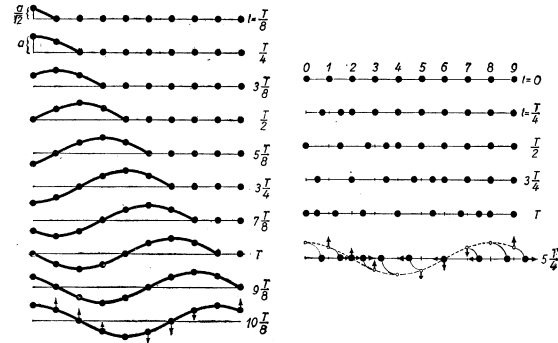
Felhasználva azt a trigonometriai összefüggést, mely szerint: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ a fenti képlet tovább alakítható:

$$x = \overbrace{2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t}^{\text{amplitúdó}} \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (2.18)$$

Feltételünk szerint $\omega_1 \approx \omega_2$ valamint legyen pl. $\omega_1 > \omega_2$. Így $\omega_1 - \omega_2$ sokkal kisebb, mint $\omega_1 + \omega_2$, tehát a fenti kifejezés koszinusz tényezője sokkal lassabban változik, így azt tekinthetjük az amplitúdó részének. Ezek alapján az eredő rezgés egy olyan szinuszrezgés, melynek körfrekvenciája $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, amplitúdója $2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ szerint lassan változik az időben 0 és $2A$ között.

Példa

Ha egyszerre szólaltatunk meg egymás közelében egy normál a hangot adó, 440 Hz-es, és egy kissé elhangol, 442 Hz-es hangvillát, tapasztalhatjuk a lebegés jelenségét. Az eredő rezgés frekvenciája 441 Hz lesz, míg az erősödés-gyengülés, azaz a lebegés frekvenciája 1 Hz. Tehát a 441 Hz-es hangot másodpercenként kétszer halljuk elhalkulni illetve felerősödni.



2.6. ábra. *Transzverzális (bal oldal) és longitudinális (jobb oldal) hullám kialakulása és terjedése*

2.2. Hullámtan

2.2.1. Alapfogalmak

A hullám zavar tovaterjedése. Mechanikai hullámok esetén a terjedéshez közeg szükséges. Ebben az esetben a közeg részecskéi közötti valamely csatolás a hullám terjedésének feltétele. Ha a közeg valamely pontját (pontjait) egyensúlyi helyzetükből kitérítjük, a kialakuló „zavar” – a közeg alkotói közötti csatolás következményeként – tovaterjed, létrejön a terjedő hullám. Példaként lásd a tóba dobott kavics keltette hullámokat, megpendített gitárhúr, hang terjedése levegőben vagy vasúti sínben, stb. Elektromágneses hullámok (fény, infravörös (hő-) sugárzás, röntgensugárzás, rádióhullámok, stb.) esetén a terjedéshez nem szükséges közeg.

A „zavar”, azaz az egyensúlyi helyzettől vett kitérés és a terjedés iránya alapján két hullámtípust különböztetünk meg. Transzverzális hullám esetén a kitérés a terjedés irányára merőleges, longitudinálisnál párhuzamos.³ Transzverzális hullámra példa egy megpendített gitárhúr, ahol a húrra merőleges a kitérés, míg a zavar terjedésének iránya a húr irányába mutat. Longitudinális hullám például a hang levegőben való terjedése, ahol a hanghullám légnyomásingadozások (sűrűsödések–ritkulások) formájában terjed.

A továbbiakban csak harmonikus hullámokat vizsgálunk. Ennél a típusú hullámnál mind

³Transzverzális hullám csak szilárd testekben jöhet létre.

a hely, mind az időfüggés szinuszos (koszinuszos). Ez azt jelenti, hogyha valamely időpillanatban „megfagyasztok” egy transzverzális hullámot – tehát csak a helyfüggést vizsgálom – szinuszgörbét kapok. Hasonlóan ha csak egy adott helyen vizsgálom a hullámot, tehát csak a közeg *egy* pontja kitérésének időfüggését figyelem, az harmonikus rezgőmozgást fog végezni.⁴ A rezgőmozgás periódusidejét a hullám periódusidejének (T) nevezzük. Egy adott transzverzális hullám hullámhosszán két szomszédos hullámhegy (hullámvölgy) távolságát értjük, longitudinális hullám esetén két szomszédos maximális sűrűsödési (vagy ritkulási) pont távolságát.⁵ Összefoglalva:

a hullám térben és időben periódikus jelenség, melynek térbeli periódusa a hullám hullámhossza, időbeli periódusa pedig valamely pontjának a rezgésideje.

Egy hullám terjedési sebességén (c) – pontosabban: fázissebességén – a hullámhossz és a periódusidő hányadosát értjük:

$$c = \frac{\lambda}{T} \quad (2.19)$$

A képlet szemléletes tartalma szerint a hullám

⁴A fenti gondolatmenet longitudinális hullámokra is elmondható. Itt a helyfüggés szinuszos volta azt jelenti, hogy egy adott időpillanatban a sűrűségváltozás térben szinuszos. Hasonlóan az időfüggés szinuszosága azt mondja ki, hogy a közeg *egy* adott kis részét vizsgálva ott a sűrűség az időben szinuszosan változik.

⁵Pontosabban: bármely két szomszédos, azonos fázisban lévő pont távolsága, lásd később.

egy periódusidő (T) alatt éppen egy hullámhossznyi utat (λ) tesz meg, a sebesség pedig e kettő hányadosa.

Bevezetve a hullám frekvenciáját, mint a periódusidő reciprokát: $\nu = \frac{1}{T}$ a fázissebesség

$$c = \lambda\nu \quad (2.20)$$

alakban is írható.

Példa

Határozzuk meg a középhullámú Kossuth adó hullámhosszát, ha tudjuk, hogy a frekvenciája 540 kHz, és a rádióhullámnak, mint elektromágneses hullámnak a levegőben való terjedési sebessége fénysebesség: $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ekkor egyszerű számolás után nyerjük: $\lambda = 555,5 \text{ m}$.

Határozzuk meg a piros fény frekvenciáját, ha tudjuk hogy hullámhossza 700 nm. Mivel a fény – levegőben – fénysebességgel terjed, a frekvencia $\nu = 4,28 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$, azaz 428 THz.

Végezetül egy gitárhúron kialakuló hullám-mintázat hullámhossza legyen 1,2 m. Ha tudjuk, hogy ez a húr g' hangon szólal meg, aminek frekvenciája kb. 660 Hz, határozzuk meg a mechanikai hullám gitárhúrban való terjedési sebességét. Mint az egyszerűen kiszámolható $c = \lambda\nu = 1,2 \text{ m} \cdot 660 \text{ Hz} = 792 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

A hullám fázisa az egyensúlyi helyzettől vett eltérésének „mértéke”, megmutatja, hogy a szinuszfüggvény periódusán belül hol járunk. A definíció hasonló a fázis harmonikus rezgésnél adott definíciójához, azzal a különbséggel, hogy míg ott a fázis csak az időtől függött (ωt), addig egy transzverzális hullám kitérése – vagy egy longitudinális hullám sűrűsödése-ritkulása – mind a helynek, mind az időnek függvénye, így

a hullám fázisa mind a helytől, mind az időtől függ.

A fázis időtől való függését a körfrekvencia határozza meg, míg a helytől való függés jellemzésére vezessük be a hullámszámot, az alábbi definícióval:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.21)$$

A hullám fázisa megváltozásának időtől függő része tehát – hasonlóan a harmonikus

rezgéseknél leírt akhoz:

$$\Delta\phi_t = \omega\Delta t. \quad (2.22)$$

A fázis megváltozásának helyfüggő része pedig a hullámszámmal fejezhető ki:

$$\Delta\phi_r = k\Delta r. \quad (2.23)$$

E kettő összege adja a teljes fázist, további részletekért lásd az apróbetűs részt!

Tegyük fel, hogy a közeg egy pontját (O pont, legyen ez az $x = 0$ pont) harmonikusan gerjesztjük, azaz mozgásának egyenlete: $\Psi = A \sin(\omega t)$. Az itt keltett „zavar” adott x távolságra $t' = \frac{x}{c}$ idő alatt jut el, azaz az x pont ennyivel később kezd meg rezgését. Így ennek rezgésállapota t -ben ugyanaz lesz, mint az O ponté $t - t' = t - \frac{x}{c}$ időpillanatban, tehát

$$\Psi(x, t) = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad (2.24)$$

Mivel $\omega = \frac{2\pi}{T}$ és $c = \frac{\lambda}{T}$, bevezetve a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ hullámszámot, az alábbi egydimenziós *hullámegyenletet* kapjuk:

$$\Psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \quad (2.25)$$

A hullám *fázisának* a szinuszfüggvény argumentumának értékét nevezzük.

2.2.2. Hullámok interferencia

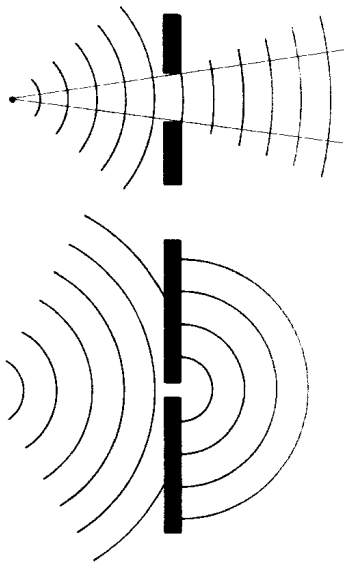
Ha terjedő hullámok találkoznak, azok kölcsönhatásba lépnek egymással. Általánosan: interferenciának nevezzük azt a jelenségkört, ami akkor jön létre, ha terjedő hullámok a tér egy pontjában találkoznak. Periódikus hullámok és nem nagyon nagy rezgési amplitúdók esetén

az eredő hullám az egyes hullámoknak megfelelő rezgések (kitérések, sűrűsödések) egyszerű összeadásával adódik, ez a szuperpozíció elve.

A hullám, mint térben terjedő zavar terjedésének általános elve a Huygens–Fresnel-elv. Ez kimondja, hogy a hullámfront (az a hely, ameddig a hullám eljutott) minden egyes pontja elemi gömbhullámok kiindulópontjának tekinthető. A következő időpillanatbeli hullámfrontot ezen kis elemi gömbhullámok összege (szuperpozíciója) adja meg.

A Huygens–Fresnel-elv működésének bemutatására vizsgáljuk meg a hullámok elhajlásának (diffrakciónak) egy egyszerű esetét, lásd

2.7. ábra. Essen síkhullám⁶ egy hullámhosszával összemérhető résre. A síkhullám terjedése során a hullámfrontból kiinduló elemi gömbhullámok síkhullámmá szuperponálódnak. Ha a hullám eléri a rést, az a széleknél megakadályozza a hullám áthaladását, tehát a rés pereme közelében nem lesz olyan „párja” az elemi gömbhullámoknak, amellyel azok síkhullámmá szuperponálódnak, így a rés szélénél gömb(kör)hullámok indulnak ki létrehozva a jellegzetes elhajlási képet. A rés belsejében minden elemi hullámnak van „szomszédja”, így továbbra is síkhullámként terjed. A jelenség természetesen csak akkorra résen figyelhető meg, melynek szélessége összemérhető a hullámhosszal. Nagyobb rés mellett a „széleffektusok” hatása elhanyagolható, a hullám továbbra is síkhullámként terjed.

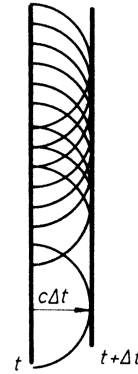


2.7. ábra. Széles rés után a hullám egyenes vonalban halad, keskeny – hullámhosszal összemérhető – résen létrejön az elhajlás

Példa

Tapasztalhatjuk-e fény illetve hanghullámok elhajlását egy ajtónyíláson? Mivel a fényhullámok hullámhossza a 100 nm-es mérettartományba esik, így ebbe a mérettartományba

⁶Olyan hullám, melynek hullámfrontja egyenes.



2.8. ábra. Síkhullám elemi gömbhullámjai újra síkhullámmá szuperponálódnak

eső réseken tud elhajlást produkálni. Mivel az ajtó szélessége a méter nagyságrendjébe esik, így ekkora nyíláson a fény egyenes vonalú terjedését tapasztaljuk, amint azt a félfalra vetett árnyékán is látszik. A hang esetében más a helyzet. A hallható hangok frekvenciáinak nagyságrendje 100-10000 Hz. Mivel a hangsebesség levegőben kb. $330 \frac{m}{s}$, így a hanghullámok hullámhossza a méter–centiméter tartományba esik (az igen mély hangoké méteres, a nagyon magasaké centiméteres). Ezek alapján – ellentétben a fényvel – a mély hangok produkálnak elhajlást egy ajtónyíláson. Részben ennek köszönhetjük, hogy ha nyitva van egy ajtó, és attól távol állunk, a szobában beszélgetőket halljuk ugyan (hanghullám elhajlása és visszaverődése), de nem látjuk (a fényhullám az ajtónyíláson nem produkál elhajlást). Hasonló okok miatt halljuk egy mellékutcába beforduló fúvószenekar mélyhangú hangszereit tovább, mint a magasakat. Hasonló okok miatt lehet kevés középhullámú rádióadóval az egész országot lefedni, míg URH adókból sokkal több kell. A mobiltelefonia fejlődésével a használt frekvenciák egyre magasabbak – a hullámhosszak csökkennek –, romlik az elhajlóképeség, így egyre több bázisállomás szükséges.

A továbbiakban csak azonos körfrekvenciájú és hullámhosszú hullámok interferenciájának egyszerű eseteit vizsgáljuk!

Vegyük észre, hogy egy adott helyen, két hullám találkozásakor akkor van (maximális) erősítés, ha az adott helyen mindkét hullámnak ugyanakkor van hullámhegye és hullám-

völgye. A (maximális) gyengítés feltétele, hogy az adott helyen az egyik hullám hullámhegye mindig a másik hullámvölgyével és hullámvölgye a másik hullámhegyével találkozzék.

Összefoglalva, hullámok találkozásukkor

erősítik egymást, ha az azonos fázisban vannak, azaz hullámhegy hullámhegygel és hullámvölgy hullámvölgygel találkozik.

Hasonlóan, találkozásukkor

gyengítés lép fel, ha a hullámok ellenfázisban vannak, azaz hullámhegy hullámvölgygel találkozik és fordítva.

A továbbiakban a hullámok interferenciájának leírásához két megközelítést alkalmazunk párhuzamosan. Vizsgáljuk a találkozó hullámokat az alapján, hogy a találkozásig mekkora a megtett *utak különbsége*, valamint, hogy találkozásukkor milyen a *fázisok különbsége*. Mint kiviláglik a két megközelítés ekvivalens, hol az egyik, hol a másik alkalmazása célszerűbb. A továbbiakban a fáziskülönbséggel dolgozó módszert apróbetűvel szedjük.

Az *útkülönbségekkel* dolgozó megközelítés szerint általánosan elmondható: ha két hullámforrás azonos frekvenciájú és azonos fázisú⁷ hullámot bocsát ki, azokon a helyeken lesznek interferencia-maximumok (maximális erősítés) amely helyekre nézve a két hullám forrástól számított útkülönbsége a hullámhossz egész számú többszöröse (vagy nulla), hiszen ezeken a helyeken az egyik hullám hullámhegye a másik hullám hullámhegyével találkozik. Hasonlóan, azokon a helyeken lesz interferencia-minimum (maximális gyengítés), ahol a két hullám útkülönbsége a hullámhossz félegész számú többszöröse, hiszen ezeken a helyeken hullámhegy hullámvölgygel találkozik. Ha az egyik hullám által megtett utat r_1 -gyel, a másikat r_2 -vel jelöljük, akkor mindez képletben:

$$\begin{aligned} \Delta r &= r_1 - r_2 = l \cdot \lambda && \text{max. erősítés} \\ \Delta r &= r_1 - r_2 = \left(l + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda && \text{max. gyengítés} \end{aligned} \quad (2.26)$$

⁷Azaz a két hullámforrásnál ugyanakkor van például maximumuk, a források szinkronban dolgoznak!

Köztes esetekkel – ahol az útkülönbség nem egész- és félegész számú többszöröse a hullámhossznak – nem foglalkozunk.

Az interferencia megközelítése *fáziskülönbségekkel* az alábbiak szerint lehetséges. Figyeljük meg, ha két azonos frekvenciájú hullám azonos fázisban: fáziskülönbségük: $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots, l \cdot 2\pi$, ($l \in \mathbb{Z}$) találkozik, akkor maximális erősítést tapasztalunk, az eredő hullám amplitúdója az összetevők amplitúdóinak összege. Ha ellenfázisban, azaz $\pm\pi, \pm 3\pi, \dots, (l + \frac{1}{2})\pi$, ($l \in \mathbb{Z}$) fáziskülönbséggel találkoznak, maximális gyengítés, azonos amplitúdók esetén kioltás következik be.⁸

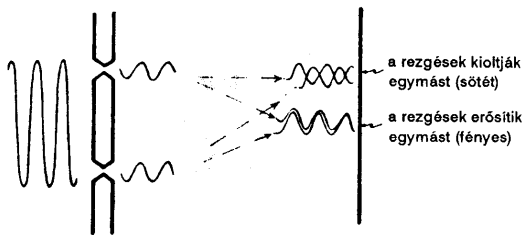
Az interferencia bonyolultabb eseteivel nem foglalkozunk.

2.2.3. Interferencia résen, rácson

A következőkben néhány egyszerű, de a gyakorlatban is előforduló elrendezésben vizsgáljuk a fényhullámok interferenciáját.

Interferencia két résen

Az interferencia jelenségének egyik legegyszerűbb példája a két résen való interferencia, vagy Young-féle interferencia. Tegyük fel, hogy az ábrának megfelelően két keskeny rés helyezkedik el egymástól a , egy felfogóernyőtől pedig D távolságra ($D \gg a$). A két lyukból induló fény legyen koherens, azaz körfrekvenciájuk és fázisuk egyezzen meg. Ez például úgy garantálható, hogy a rések síkjával párhuzamosan beeső síkhullámot használunk. Vizsgáljuk meg, hogy a két hullám interferenciájának következtében az ernyőn milyen interferencia-mintázat keletkezik!



2.9. ábra. Az interferencia magyarázatához 1.

A fentiek alapján, ott lesz az ernyőn erősítés, ahol a két résből induló hullám útkülönbsége a hullámhossz egész számú többszöröse:

⁸Vesd össze a harmonikus rezgések összeadására bevezetett forgóvektoros képpel, 2.1.2. fejezet!

$\Delta r = l \cdot \lambda$, ($l \in \mathbb{Z}$). Hasonlóan ott lesz gyengítés (egyenlő erősségű források esetén kioltás, sötét), ahol az útkülönbség a hullámhossz félegészszámú többszöröse: $\Delta r = (l + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$, ($l \in \mathbb{Z}$), lásd 2.9. ábra.

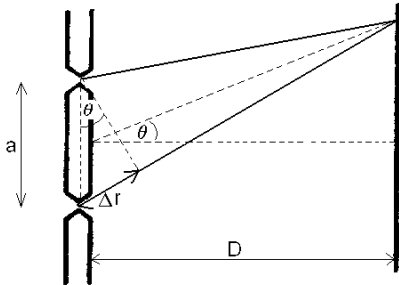
Amint az a 2.10. ábra alapján egyszerűen belátható⁹ az útkülönbség $\Delta r \approx a \sin \theta$. Ezt a fenti feltételekbe helyettesítve, adott θ esetén, ha

$$\begin{aligned} \sin \theta &= l \frac{\lambda}{a} && \text{maximális erősítés} \\ \sin \theta &= \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{a} && \text{maximális gyengítés} \end{aligned} \quad (2.27)$$

tapasztalható. Mint látható

az ernyőn váltakozva sötét és világos csíkok jelennek meg.

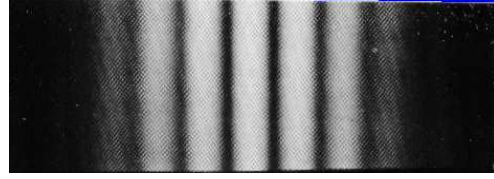
Erősítés azoknál a θ szögeknél, melyekre a fenti erősítési, gyengítés-kioltás pedig azoknál, melyekre a gyengítési feltétel teljesül, lásd 2.11. ábra.



2.10. ábra. Az interferencia magyarázatához 2

A fenti eredmény megkapható a fáziskülönbségek módszerével is! Ehhez meg kell határozni, hogy az ernyő mely pontjaiba érkezik a két fénysugár azonos fázissal (maximális erősítés), és melyekbe ellenfázissal (maximális gyengítés – kioltás). Mivel a források koherensek, így egy adott pontban a fáziskülönbségük csak az útkülönbségtől függ, tehát ott lesz maximális erősítés, ahol az útkülönbséghez tartozó fáziskülönbség éppen 2π egész számú többszöröse: $k\Delta r = l \cdot 2\pi$. Hasonlóan, ott lesz maximális gyengítés, ahol az útkülönbségből származó fáziskülönbség éppen $(l + \frac{1}{2})\pi$, azaz: $k\Delta r = (l + \frac{1}{2})\pi$. Mivel $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, a kapott eredmény megegyezik az útkülönbségekkel nyert eredménnyel!

⁹Levezetésünk feltételezi, hogy az ernyő távolsága sokkal nagyobb, mint a két rés távolsága, azaz $D \gg a$. Ekkor ugyanis a két sugár közel párhuzamos, így útkülönbségük a bemutatott módon jól becsülhető.



2.11. ábra. Fényelhajlás két résen

Példa

Két rés egymástól való távolsága $a = 0,1$ mm. Erre párhuzamos, $\lambda = 0,436$ nm hullámhosszúságú monokromatikus fénynyalábot ejtek. Mekkora szögeknél tapasztalom a nulladrendű ($l = 0$), és az elsőrendű ($l = 1$) erősítést, és mekkora távolság lesz e két erősítés között az $D = 1,5$ m távolságban elhelyezett felfogóernyőn?

A nulladrendű erősítés feltétele (2.27) alapján:

$$\sin \theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0,$$

míg az elsőrendű:

$$\sin \theta_1 = 1 \frac{436 \cdot 10^{-9} \text{m}}{10^{-4} \text{m}} \Rightarrow \theta_1 = 0,25^\circ$$

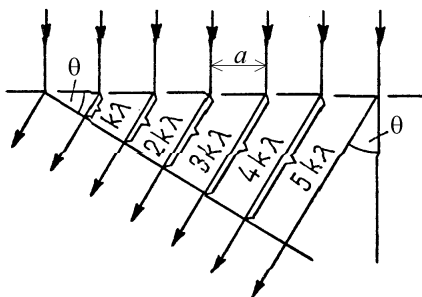
Ezek alapján, mint az egyszerű geometriai számítással adódik a nulladrend és az elsőrend s távolsága az ernyőn:

$$\tan \theta_1 = \frac{s}{1,5} \Rightarrow s = 6 \text{ mm}$$

Interferencia rácson

Tekintsük a fenti kétréses kísérlet általánosítását! Ne két résen, hanem keskeny rések szabályos sorozatán, rácson kialakuló interferenciát vizsgáljunk! Két szomszédos rés távolsága legyen a , ez az érték a *rácsállandó*. Ha erre a rácsra síkhullámot ejtünk, akkor a réseken átjutó igen sok és keskeny sugárnyaláb interferál egymással, ezeket kell vizsgálni. Mivel a rácsra eső síkhullám a rács síkjával párhuzamos, így a rácsnyílások minden pontjában a fázis azonos. Vizsgáljuk azokat a nyalábokat, melyek θ szöggel térülnek el. A szomszédos rácsnyílásból kiinduló sugarak akkor erősítik egymást, ha köztük az útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse. Ha ez a feltétel két szomszédos résre teljesül, akkor *minden*

résre teljesül hiszen a rács állandó periódussal tartalmazza a réseket, lásd 2.12. ábra. Tehát ebben az esetben bármely két sugár útkülönbsége λ egész számú többszöröse, így erősítik egymást. A sugarak tehát olyan θ irányokba



2.12. ábra. *Interferencia rácsra*

erősítik egymást, melyekre:

$$a \sin \theta = l\lambda, \quad (l \in \mathbb{Z}),$$

azaz

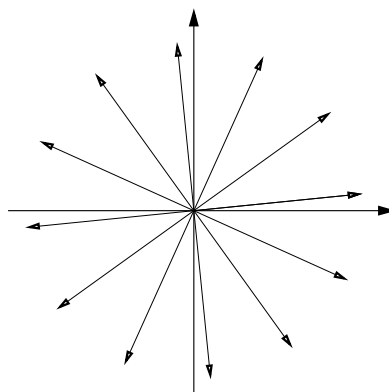
$$\sin \theta = l \frac{\lambda}{a}, \quad (l \in \mathbb{Z}), \quad (2.28)$$

Minden olyan irányban, mely nem felel meg (2.28)-nak, azaz melyeknél a szomszédos réseken átjutó hullámok útkülönbsége nem a hullámhossz egész számú többszöröse, nem tapasztalunk intenzitást. Ennek oka abban keresendő, hogy a különböző réseken átjutó hullámok útkülönbsége ekkor nem $k \cdot \lambda$, fáziskülönbsége tehát nem $k \cdot 2\pi$. Így a különböző réseken átjutott hullámok fázisa is különböző, (de nem állandó $k2\pi$ fáziskülönbségű). Sok-sok különböző fázis – v.ö. 2.1.2. fejezet – összege pedig nullát eredményez, lásd 2.13. ábra.

Mivel az erősítési tartozó szöget megadó kifejezés tartalmazza a fény hullámhosszát, ebből következően adott rács esetén a különböző hullámhosszúságú (színű) fényt más-más szöggel téríti el. Így monokromatikus (csak egy hullámhosszt tartalmazó, „egyszínű”) fényt a rács a (2.28) kifejezéssel adott szöggel téríti el, éles spektrumvonalat kapunk. Tehát

adott rácsállandójú rács adott hullámhosszúságú fényt adott szöggel térít el,

így alkalmas hullámhossz meghatározásra. Fehér (minden színösszetevőt, minden látható hullámhosszt tartalmazó) fény esetén minden



2.13. ábra. *Sok különböző fázis összege nulla*

színt (hullámhosszt) a fenti képletnek megfelelően más-más szöggel téríti el, azaz felbontja a fényt, és jól ismert spektrumot adja. Így lehetséges rácsokat használni a színekélemezésben. Rácsok segítségével történnek a legpontosabb hullámhosszmérések is.

Példa

Egy rács rácsállandója $24 \mu\text{m}$. Erre vörös és ibolya színű fény keverékét ejtjük ($\lambda_{\text{vörös}} = 560 \text{ nm}$, $\lambda_{\text{ibolya}} = 396 \text{ nm}$), hogy azt összetevőire bontsuk. Mekkora távolság lesz a vörös és az ibolya sugár elsőrendű maximumai között a $0,5 \text{ m}$ távolságban elhelyezett felfogóernyőn?

A (2.28) kifejezés felhasználásával, θ_{1v} -vel jelölve a vörös fény elsőrendű elhajlásának szögét, és θ_{1i} -vel az ibolyáét:

$$\sin \theta_{1v} = \frac{560 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{24 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \Rightarrow \theta_{1v} = 1,33^\circ$$

$$\sin \theta_{1i} = \frac{396 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{24 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \Rightarrow \theta_{1i} = 0,94^\circ$$

A szögekből kiszámolható a két – a rács által felbontott – elsőrendű maximum középvonalától való távolsága:

$$\tan \theta_{1v} = \frac{s_{1v}}{0,5 \text{ m}} \Rightarrow s_{1v} = 0,012 \text{ m}$$

$$\tan \theta_{1i} = \frac{s_{1i}}{0,5 \text{ m}} \Rightarrow s_{1i} = 0,008 \text{ m}$$

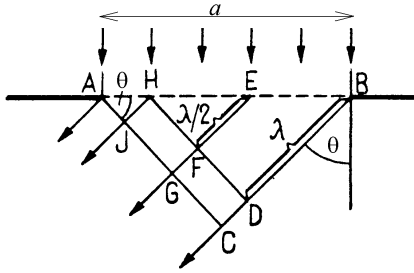
Ebből a szétválasztott sugarak távolsága:

$$\Delta s = 0,004 \text{ m} = 4 \text{ mm}$$

Interferencia széles résen

A fentiek ismeretében nem lesz nehéz meghatározni, hogy mi történik akkor, ha λ hullámhosszú síkhullám egy a szélességű résre esik, a rés síkjával párhuzamosan. Ekkor – a Huygens–Fresnel-elv értelmében – a rés minden egyes pontját elemi hullámok kiindulópontjának tekinthetjük. Ezek a hullámok (mivel a beeső hullám síkhullám) azonos fázisban vannak, és egymással való interferenciájuk adja meg az eredő intenzitást.

Vizsgáljuk ismét azt a sugárnyalábot, mely θ szöggel térült el az eredeti iránytól. A θ szög alatt elhajló nyalábban azonban a nyalábra merőleges AC síkban a fázis nem ugyanaz, mert az egyes sugarak között útkülönbség van, ami (2.23) szerint fáziskülönbségre vezet. Tegyük fel, hogy a BD szakasz hossza éppen a fény hullámhossza, ekkor a H -ból és B -ből jövő sugarak útkülönbsége éppen λ , lásd 2.14. ábra. Ha E a \overline{HB} távolság felezőpontja, akkor



2.14. ábra. A résen történő interferencia magyarázatához

az E -ből és B -ből jövő sugarak közötti útkülönbség éppen $\frac{\lambda}{2}$, így ezek tehát kioltják egymást. A BC és EG közötti sugarakhoz hasonlóan a BC és EG közötti nyaláb minden sugarához találunk az EG és HJ nyalábban egy megfelelő sugarat, mellyel az illető sugár kioltja egymást (útkülönbségük $\frac{\lambda}{2}$). A BC és HJ közötti sugárnyaláb sugarai tehát kioltják egymást! Így csak azok a sugarak maradnak meg, melyek a résnek az A és H pontjai közötti szakaszából indulnak ki. Látható, hogy a θ szög kisebbitésével H minél közelebb jut A -hoz, míg végül azzal összeesik, így a megmaradó sugárnyaláb mind keskenyebbé válik, majd elfogy. Ez akkor következik be, mikor az A -ból és B -ből kiinduló sugarak közötti útkülönbség éppen λ , vagy annak egész számú többszöröse.

Ha a rés szélességét, \overline{AB} -t röviden a -val jelöljük, akkor az alábbi eredményre jutunk:

$$a \sin \theta = l\lambda, \quad (l \in \mathbb{Z}),$$

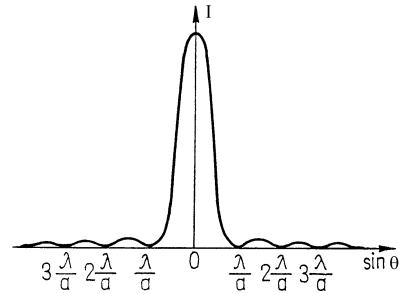
tehát

$$\sin \theta = l \frac{\lambda}{a}, \quad (l \in \mathbb{Z}), \quad (2.29)$$

Ez az összefüggés megadja azokat az irányokat, melyekben a résből kiinduló egymással párhuzamos sugarak kioltják egymást, ezekben a szögekben nem tapasztalunk intenzitást.

(Figyelem! A kapott kifejezést ne keverjük össze, a vele alakilag megegyező (2.28) kifejezéssel, amely rács esetében a *maximális intenzitású* helyeket adja meg, és amelyben a nem a rés szélessége, hanem a rácsállandó!)

Amint kimutatható az intenzitáseloszlás a szög- (pontosabban a szög szinuszának-) függvényében a 2.15. ábrának megfelelő. Látható,



2.15. ábra. Intenzitáseloszlás résen történő elhajláskor

hogy a (2.29) kifejezésnek eleget tevő irányokban nincs intenzitás, valamint a legnagyobb intenzitás a nulla fokhoz, tehát az eltérülés nélküli irányhoz tartozik. Tehát

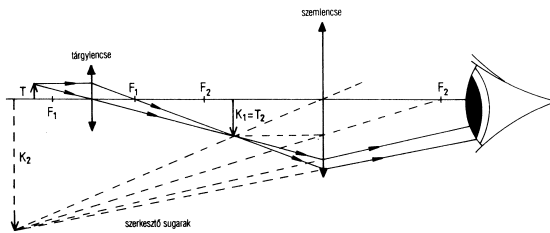
résen a legnagyobb intenzitást az elhajlás nélkül áthaladó sugár adja, és a szög növelésével periodikusan figyelhetők meg nulla intenzitású (sötét) sávok.

Megemlítjük, hogyha a rés szélessége lényegesen nagyobb, mint a fény hullámhossza, akkor az intenzitásgörbe lecsengése nagyon gyors, így megszűnnek az elhajlásjelenségek, a fény egyenes vonalban halad. Ez a geometriai optikai határeset.

2.2.4. A mikroszkóp felbontóképessége

Próbáljuk meghatározni eddigi eredményeinkkel az optikai mikroszkóp felbontóképességét, mi az a minimális távolság, amelyen távolságban lévő két pontot még elkülöníthetünk, szakszóval: felbonthatunk. A mikroszkóp képalkotása a 2.16 ábrán követhető, ahol a szemlencse (okulárlencse) és a tárgylencse gyűjtőlencsék. T a nagyítandó tárgy, ennek képe a $K_1 = T_2$, amely egyben az okulárlencse számára a tárgy, ennek képe pedig a (virtuális)

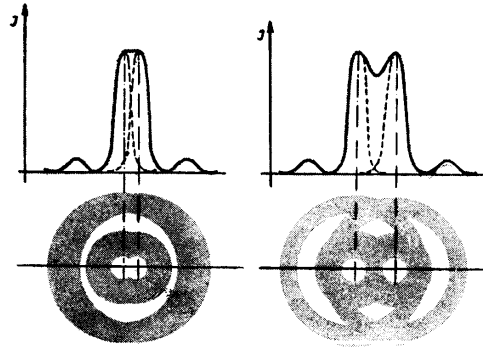
nagyított, fordított állású K_2 kép. *Geometriai optikai* számítások – melyek a geometriai optika törvényeivel (lásd alább) számítják ki a nagyítást – arra vezetnek, hogy a mikroszkóp nagyítása akár 2500-szorosig növelhető, azonban a tapasztalatok azt mutatják, hogy kb. 1500-szorosnál nagyobb nagyítású mikroszkópot nem lehet készíteni.



2.16. ábra. Az optikai mikroszkóp sugármene-
te

Ennek oka a *hullámoptikában* keresendő. A geometriai optika ugyanis nem veszi azt figyelembe, hogy a lencsék peremén a fénynyaláb elhajlik. Emlékezzünk vissza a Huygens–Fresnel-elve, amely kimondta, hogy a hullámfront minden egyes pontja elemi gömbhullámok kiindulópontja. A sugárban ezen elemi hullámok mindegyikének van szomszédja, míg a lencsék pereméről indulóknak nincs. Amint ebből belátható, még a legtökéletesebb optikai lencsék esetén is a nyalábot határoló foglalatokon (apertúra, pupilla) elhajlik a fény, ezért egy pont képe nem pont, hanem ún. *elhajlási korong* lesz. Ez nyilván korlátot jelent a rendszer feloldóképességére. A hatás csökkentése lehetséges a lencse méretének növelésével illetve a fény hullámhosszának csökkentésével. Ha ezek az elhajlási korongok fedik egymást, a pontok képei nehezen vagy egyáltalán nem különböztethetők meg, lásd 2.17. ábra.

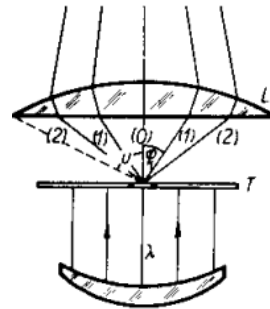
A továbbiakban is csak két pont leképezését vizsgáljuk, és figyelembe vesszük azt is, hogy képalkotás csak akkor lehetséges, ha a pontokon elhajló sugárnyalábnak csak a nulladrendű (a 2.18. ábrán (0) -val jelölve), hanem az elsőrendű nyalábjá (az ábrán (1) -gyel jelölt) is bejut a lencsébe. Az interferenciás erősítés feltétele, az, hogy két, d távolságban lévő pontból induló hullámok erősítsék egymást. A két megvilágított tárgy pont úgy viselkedik, mint két fényforrás, lásd az Interferencia két résen



2.17. ábra. Ha a pontok túl közel vannak, az elhajlási korongok átlapolnak, így a pontok nem különböztethetők meg

c. fejezet, (2.10) képletét:

$$d \sin \phi = l \lambda \quad (2.30)$$



2.18. ábra. A tárgylemezen (T) lévő két ponton létrejövő elhajlás nulladrendű, elsőrendű és másodrendű nyalábjá

Az első rend objektívbe jutásának feltétele, hogy az objektív nyílásszöge (a 2.18 ábrán u -val jelölve) nagyobb legyen, mint ϕ . Mivel a szinuszfüggvény ezen a tartományon monoton, így $u > \phi$ feltételből következik, hogy $\sin u > \sin \phi$. A (2.30) kifejezés elsőrendre ($l = 1$) vonatkozó alakjából pedig $\sin \phi = \frac{\lambda}{d}$. E kettő összevetéséből nyerjük:

$$d > \frac{\lambda}{\sin u} \quad (2.31)$$

Így a d felbontási határ – azaz amilyen távolságú pontok még elkülöníthetők – a nyílásszög szinuszával (az ún. *numerikus apertúrával*) növekszik, tehát nagyobb nyílásszögű objektív jobb felbontást ad. Hasonlóan látható,

hogy növekvő hullámhosszal a felbontási határ nő, tehát nagyobb hullámhosszt használva a mikroszkóp felbontása romlik. Ezért használnak néha a láthatónál kisebb hullámhosszú (ultraibolya) fényt a mikroszkópiában.

Az n törésmutatójú közegben a fény hullámhossza $\frac{\lambda}{n}$ -re csökken (lásd: A geometriai optika alapjai c. fejezetet), így ekkor a felbontási határ:

$$d > \frac{\lambda}{n \sin u}$$

A gyakorlatban ezt úgy valósítják meg, hogy a tárgylemezre átlátzó, nagy törésmutatójú folyadékot, úgynevezett *immerziós olajat* (víz, cédrus-olaj) csöppentenek, és ebbe kerül a tárgy és az objektívlencse felülete is. Így a felbontási képesség n -szeresére növelhető

A technikai lehetőségeket figyelembe véve az elérhető felbontási határ:

$$d \approx \frac{\lambda}{1,35}, \quad (2.32)$$

tehát

mindig csak az alkalmazott fény hullámhosszánál kisebb pontosságot tudunk elérni!

2.2.5. A geometriai optika alapjai

A geometriai optika a fény terjedésével, és annak a hullámhosszánál jóval nagyobb optikai elemeken való viselkedésével foglalkozik. Ebben az esetben ugyanis feltehető a fény egyenes vonalú terjedése, v.ö. a résen való elhajlásról írtakkal, ahol nagy a hullámhossznál sokkal nagyobb rés esetén kapott eredmény szerint a fénysugár nem szenved elhajlást, hanem egyenes vonalban halad.

Az alaptörvények kimondásához először be kell vezetni a törésmutató fogalmát. Egy anyag törésmutatója a vákuumbeli fénysebesség ($c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) és az adott anyagbeli fénysebesség (v) hányadosa:

$$n = \frac{c}{v} \quad (2.33)$$

A gázok törésmutatója $n > 1$, $n \approx 1$, míg a legtöbb szilárd testé és folyadéké $n \approx 1,2-1,6$.

A geometriai optika három alaptörvénye:

1. A fény egyenes vonalban terjed

2. Különböző optikai közegek határán ($n_1 \neq n_2$) a fénysugár egyik része visszaverődik, másik része behatol az új közegbe

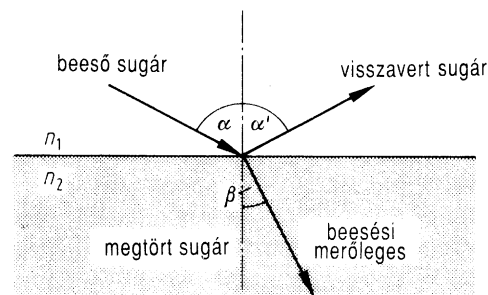
3. A fénysugármenetek megfordíthatók

A fenti három törvény a Fermat-elvből levezethető, tehát tulajdonképpen az tekinthető a geometriai optika alapjának. A Fermat-elv kimondja, hogy az az idő, amely alatt a fény egy A pontból egy B pontba – megadott mellékfeltételek mellett (közegek, visszaverődések) – eljut, minimális (pontosabban: szélső érték, és általában minimum).

Azokban az esetekben, mikor a fénysugár egy adott felületről visszaverődik a beesési szög¹⁰ és a visszaverődési szög megegyezik: $\alpha = \alpha'$.

Ha a fénysugár behatol egy más törésmutatójú közegbe, akkor a beesési és a törési szög közötti összefüggés a Snellius–Descartes-törvény (törési törvény):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad (2.34)$$



2.19. ábra. A Snellius-Descartes törvény

Amint látható, ha a fény nagyobb törésmutatójú (optikailag sűrűbb) közegbe lép, a beesési merőlegeshez törik, ellenkező esetben attól elfelé. Ha a törésmutató nem változik, akkor $\alpha = \beta$, tehát a fény homogén közegben egyenes vonalban terjed.

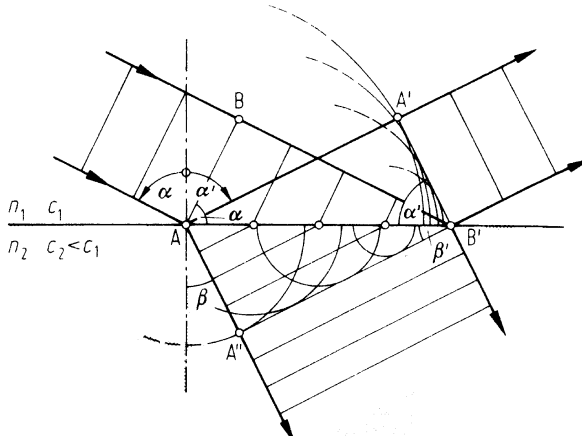
A törvény egyszerű igazolása az alábbiak szerint lehetséges, lásd 2.20. ábra. Essen síkhullám (olyan hullám, melyben az azonos fázisú pontok síkot alkotnak) α szögben a felülethatárra. Az AB fázisfelület az AB' határfelületen való továbbhaladásakor elemi hullámokat kelt (lásd Huygens–Frensel-elv) az 1 és a 2

¹⁰A hullám terjedésének iránya és a felületre a beesés pontjában állított merőleges – beesési merőleges – szöge.

közegben egyaránt. Az 1 közegben az új $A'B'$ sík fázisfelületté, míg a 2 közegben az $A''B'$ sík fázisfelületté szuperponálódnak. Ezek különböző hajlása a közegekben különböző v_1 és v_2 fénysebességekből adódik, ugyanis a fázisfelületek megfelelő A és A' , B és B' , valamint A és A'' pontjai között eltelt τ futási idők azonosak. Amint az ábrából geometriailag adódik:

$$\begin{aligned}\overline{BB'} &= v_1\tau = \overline{AB'} \sin \alpha \\ \overline{AA'} &= v_1\tau = \overline{AB'} \sin \alpha' \\ \overline{AA''} &= v_2\tau = \overline{AB'} \sin \beta\end{aligned}\quad (2.35)$$

Az első két egyenlet elosztásából a visszaverődési-, míg az első és harmadik elosztásából a törési törvényt nyerjük.



2.20. ábra. A Snellius-Descartes törvény igazolásához

Mint a törési törvényből látható, ha a fény nagyobból törésmutatójú (n_1) közegből kisebb törésmutatójú (n_2) közegbe lép, akkor a törési szög nagyobb, mint a beesési. A beesési szöget növelve, elérhetjük azt a helyzetet, mikor a törési szög 90° lesz – ekkor a beesési szög még kisebb, mint 90° . Tovább növelve a beesési szöget az eddig megtört sugár már nem lép ki az új, kisebb törésmutatójú közegbe, hanem a tükrötörvénynek megfelelően visszaverődik, tehát visszaverődésének szöge megegyezik a beesési szöggel. Azt a szöget, amelynél ez legelőször bekövetkezik *totálreflexió határszög*nek nevezzük. Természetesen $\frac{\sin \alpha_h}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1}$. Ebből

$$\sin \alpha_h = \frac{n_2}{n_1} \quad (2.36)$$

Fontos még megjegyeznünk, hogy

különböző törésmutatójú közegekben a fény hullámhossza más és más.

Amint a (2.20) és 2.33 egyenletek összevetéséből látható – vegyük figyelembe, hogy most a fény vákuumbeli terjedési sebességét jelöljük c -vel, míg az közeget v -vel

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu}$$

Ha a vákuumbeli hullámhosszat λ_0 -lal jelöljük, akkor az n törésmutatójú közegben a fény λ hullámhossza:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (2.37)$$

értékre csökken le.

A fáziskontraszt-mikroszkópia elve

Az optikai mikroszkóp tárgyalásakor olyan tárgyakról történő képalkotást vizsgáltunk, mely tárgyak különböző részei más-más módon engedik át a fényt, azaz más-más mértékben csökkentik az áteresztett fényhullám amplitúdóját. Ezeket a tárgyakat *amplitúdó-tárgyak*nak nevezzük. Vannak azonban olyan tárgyak is – és ezek a biológiában gyakoriak –, amelyek fényelnyelő képessége mindenütt körülbelül azonos, így az áthaladó fény intenzitásában nem okoz észrevehető változást, azonban törésmutatójuk helyről-helyre változik. Ennek neve *fázistárgy*. Ha ugyanis a fénysugár a minta bizonyos részein más törésmutatójú anyagban halad, úgy a hullámhossza (2.37) szerint megváltozik. Emiatt fázisa a (2.23) kifejezés szerint eltolódik, így interferenciára lesz képes egy ismert fázisú „referencia-sugárral” (valamint a tárgy más törésmutatójú területéről más fázistolással érkező sugarakkal). Így a fázisban bekövetkező változásokat (amelyeket közvetlenül nem érzékelünk) sikerült átalakítani intenzitásváltozókká. Ez

lehetővé teszi a fény intenzitásában változást nem okozó (fázis)tárgyak vizsgálatát.

(A képalkotás gyakorlati részének, és az elmélet részleteinek bemutatása meghaladná e jegyzet bonyolultságát.)

3. fejezet

Kvantummechanika

3.1. Klasszikus módon nem magyarázható jelenségek

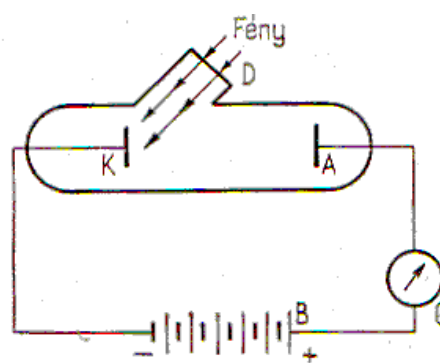
3.1.1. A fény hullámtermészete, a klasszikus kép

Hétköznapi tapasztalatainkból fakadóan a fényt hullámnak tekintjük. A fény terjedése sikeresen leírható a Huygens-Fresnel-elvvel, amely a hullámterjedés általános elveként kimondja, hogy a hullámfelület minden egyes pontja elemi gömbhullámok kiindulópontja, és ezen kis gömbhullámok interferenciája adja meg a következő időpillanatbeli hullámfrontot. Mivel a Huygens-Fresnel elvvel pontosan számot tudunk adni a fény töréséről, visszaverődéséről és elhajlásáról, joggal feltételezhetjük, hogy a fény hullám, lásd előző fejezet.

3.1.2. A fényelektromos jelenség és a fotonhipotézis

A klasszikus kísérletek tanulsága szerint a fény hullám. A fényelektromos jelenség, más néven *fotoeffektus* azonban ennek ellentmondani látszik. Ugyanis, ha fémlemezre látható fény, ultraibolya- vagy röntgensugárzás esik, a fémből elektronok lökődnek ki.

Ez nem magyarázható a fény hullámtermészetével, ugyanis a mérések azt mutatják, hogy nagyon kis fényintenzitások mellett is van elektronkilépés. A hullámképpel nehezen magyarázható, hogy a térben kiterjedt (rosszul lokalizált) hullám hogyan képes energiáját átadni a pontszerűnek tekintett (jól lokalizált) elektronnak. Tehát



3.1. ábra. Fotocella

a fotoeffektus a fény hullámtermészetével nem magyarázható!

A megoldás A. Einstein (1905) nevéhez fűződik¹, aki forradalmi újításként feltette, hogy

a fény fényrészecskékből, fotonokból áll!

Ez egy kitűnő ötlet, mert így nyilvánvalóan megoldódik a hullám lokalizálatlanságából fakadó probléma, de magyarázatot nyer a kis intenzitások melletti elektronkilépés jelensége is. A kis intenzitású (fény)hullám *kevés* energiát szállít, *egyenletesen*. Ha viszont a fény részecskékből áll, a kis intenzitás pusztán azt jelenti, hogy ritkán érkezik foton, ám az bírhat akkora energiával, ami már elegendő ahhoz, hogy kilökjön egy elektront. Tehát míg hullám esetén egyenletesen áramlik az energia, addig a részecske-kép szerint az energia kis energiacsomagok (fotonok) formájában terjed.

¹Nem eléggé ismert tény, hogy Einstein ezért az eredményéért – tehát nem a relativitáselméletért – kapta meg 1921-ben a Nobel-díjat.

Einstein feltételezése szerint minden egyes foton:

- csak az adott anyagra jellemző sebességgel (a közegbeli fénysebességgel) haladhat,
- energiát szállít, amely energia csak a foton frekvenciájától függ,
- impulzusa van

Az einsteini feltételezés szerint *egy foton energiája*:

$$E_{foton} = h\nu = \hbar\omega \quad (3.1)$$

és *impulzusa*:

$$p_{foton} = \frac{h\nu}{c}, \quad (3.2)$$

ahol ν a foton frekvenciája, h , a *Planck-állandó*, melynek értéke $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js, valamint² $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Ezzel a fotoeffektus már kvantitatíve is magyarázható!

Egy fémbeli (delokalizált) elektront az atomtörzs vonzása a fémrács környezetében tart. Ebből a vonzásból való kiszakításához A Joule munka szükséges, ez a *kilépési munka*³, amelynek értéke természetesen anyagfüggő. Ha a kiszakított elektron a fém v sebességgel hagyja el, akkor a fotoeffektust leíró egyenlet:

$$h\nu = A + \frac{1}{2}mv^2. \quad (3.3)$$

Ezek szerint a fotoeffektust kiváltó, fémmre érkező foton energiája egyrészt fedezi a fémben kötött elektron kiszakításához szükséges kilépési munkát (A), másrészt a „maradék” energiája a kiléptetett elektron mozgási energiájává alakul ($\frac{1}{2}mv^2$).

Példa

Számítsuk ki az ibolyaszínű fény ($\lambda = 400$ nm) egy fotonjának energiáját, majd döntsük el, hogy ilyen színű fénnel való – tetszőleges intenzitású – megvilágítás mellett létrejön-e elektronkilépés egy ezüstlemezről, melyre a

kilépési munka: $A=4,05$ eV= $0,648$ aJ. Mi történik, ha ugyanezzel a fénnel BaO lapot világítunk meg, melyre a kilépési munka $0,99$ eV= $0,158$ aJ?

Az ibolyaszínű fény fotonjának frekvenciája:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 75 \text{ THz.}$$

Egy foton energiája tehát:

$$E = hf = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 5 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0,5 \text{ aJ.} \quad (3.4)$$

Amint látható, ez az energia nem tudja fedezni az elektron kilépéséhez szükséges munkát, tehát nem történik elektronkilépés – függetlenül a megvilágító fény erősségétől.

Ha azonban BaO-ot világítunk meg, már bekövetkezik az elektronkilépés, és a kiléptetett elektron mozgási energiáját illetve sebességét a (3.3) segítségével határozhatjuk meg.

$$E_{mozg} = hf - A = 0,5 \text{ aJ} - 0,158 \text{ aJ} = 0,342 \text{ aJ}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = 8,4 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A kiléptetett elektronok száma pedig arányos lesz a megvilágító fény intenzitásával.

3.1.3. A fény kettős természete

Láttuk, hogy bizonyos jelenségek csak a fény hullámtermészetének feltételezésével magyarázhatók, és részecskeképet használva ellentmondásra vezetnek, míg más jelenségek kizárólag a részecske (korpuzkuláris) elképzelés keretein belül értelmezhetők. Ezt a „hol részecske–hol hullám” viselkedést nevezzük a *fény kettős természetének*.

A fentiekben bemutattuk, hogy a klasszikusan hullámnak tekintett fény bizonyos esetekben részecskeként látszik viselkedni. A következő fejezetben a fentiek „tükörképét” mutatjuk be, azt, hogy klasszikusan részecskének tekintett objektumok képesek hullámtulajdonosságokat mutatni.

²Ez az úgynevezett: „há-vonás”.

³A kilépési munka akkora, amellyel az elektront olyan távol tudjuk vinni az atomtörzstől, hogy már ne hasson rá számottevő vonzerő.

3.1.4. A vonalas színekép

Ha hidrogéngázt gerjesztett állapotba hozunk – azaz energiát közlünk vele –, az a gerjesztés megszűnte után fölös energiájától fotonok (látható- vagy UV-fény) kibocsátásával szabadul meg. A mérések (Balmer, Rydberg és Ritz) azt mutatták, hogy a gerjesztett gáz alapállapotba való visszatérése közben *csak bizonyos* – a gázra jellemző – *frekvenciájú fotonokat bocsát ki*.

Balmer majd Rydberg mérései szerint a gerjesztett hidrogén által kibocsátott illetve elnyelt fény frekvenciája csak az alábbi lehet:

$$\nu_{nm} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (3.5)$$

ahol R a *Rydberg állandó*, $R = 3,29 \cdot 10^{15}$ Hz, n és m pedig pozitív egész számok.

Későbbi mérések és megfontolások arra vezettek, hogy nemcsak a hidrogén, hanem sok más (gerjesztett) anyag is csak bizonyos, – az adott anyagra jellemző – frekvenciákon képes fotont kibocsátani (emittálni). További vizsgálatok pedig azt is megmutatták, hogy a hidrogén (valamint sok egyéb anyag) csak bizonyos frekvenciájú fényt képes elnyelni (abszorbeálni).

Ha a hullámhossz függvényében ábrázoljuk a kibocsátott energiát, az úgynevezett *színeképhez* jutunk. Mivel a gerjesztett anyagok csak bizonyos frekvenciákon bocsátanak ki, illetve nyelnek el energiát, így színeképük (mind az emissziós, mind az abszorpciós) vonalakkból áll, ez a vonalas színekép, lásd a 3.2 ábrát!

Példa

Megelőlegezve, hogy m és n az úgynevezett főkvantumszám, számítsuk ki, hogy mekkora frekvenciájú fotont bocsát ki a H-atom elektronja, miközben $n = 3$ -ból $m_1 = 2$ illetve $m_2 = 1$ állapotba kerül (3.2 ábrán vastagítva). Miért fedezték fel az előbbi átmenetet hamarabb (Balmer) és az utóbbit később (Lyman).

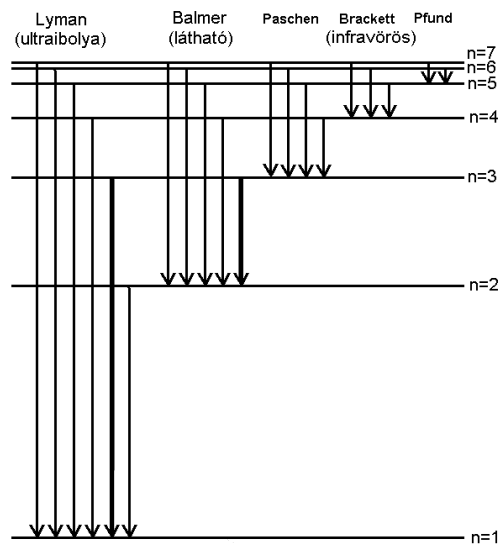
Az első átmenet során kibocsátott energia:

$$\begin{aligned} E_{n \rightarrow m_1} &= R \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \\ &= 3,29 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = 4,57 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \end{aligned} \quad (3.6)$$

míg a második esetben:

$$E_{n \rightarrow m_1} = 2,92 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad (3.7)$$

Látható, hogy az első átmenet – pontosabban az $m = 2$ -re érkező átmenetek, a *Balmer-sorozat* – a látható tartományba esik, így felfedezésük könnyebb volt, míg az $n = 1$ -re érkező átmenetek – Lyman-sorozat – már az UV tartományba esnek, így felfedezésük váratott magára.



3.2. ábra. A hidrogénatom emissziós sorozatai

A fenti tapasztalatokat merészen úgy általánosíthatjuk, hogy

bizonyos anyagok (pl. gázok) csak meghatározott nagyságú energiát képesek felvenni illetve leadni. Ezen energiák törtrészei illetve nem egész többszöröseai az adott anyag számára elérhetetlenek!

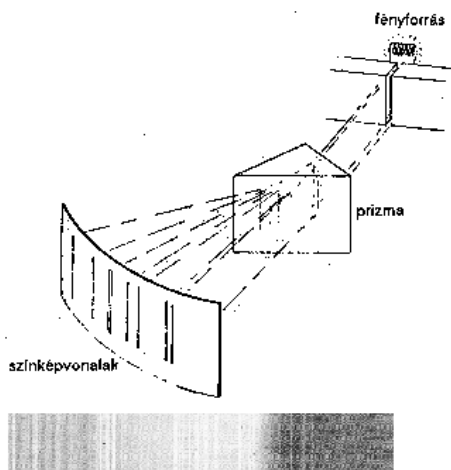
Ez a hatás a hétköznapokban közvetlenül nem érzékelhető, mivel ez az energiaegység a makrovilág energiáihoz képest detektálhatatlanul kicsi.

Hasonlatképpen egy könyvespolcot képzelhetünk el. Ennek egyre magasabb polcain egyre nagyobb energiával bírnak az oda helyezett könyvek. Ebben az esetben a könyvek energia csak diszkrét módon adható át – illetve vehető el –, hiszen két polc közé nem tehetem azt. Az „emisszió” megfelelő folyamat során a könyv néhány polcot „esik”, a felszabaduló energiát pedig kisugározza. Az „abszorpció” során a könyvnek átadott energia hatására az néhány polccal feljebb „ugrik”.

Ha az energiaátadás legkisebb, tovább nem osztható egysége (az úgynevezett *hatáskvantum*) makroszkopikus méretű lenne komoly gondban lennénk. Egy könyvet például csak akkor tehetnénk le az íróasztalunkra, ha annak magassága pontosan a könyvespolc egy polcának magasságában lenne, arról nem is beszélve, hogy egy hegyre kapaszkodó vasútnak is csak ott lehetne megállója, ahol éppen egy (vagy több, de egész) energiakvantummal magasabb energiájú állapotba kerül. Hogy két polc, illetve megálló között *milyen* állapotban vannak a testek, arról még nehezebb képet alkotni. Ha ezen való töprengésünk során egy kismacska téved szobánkba, ebben a nagy hatáskvantumú világban még csak meg sem simogathatjuk, hiszen abból vagy nem érez semmit (nincs energiaátadás), vagy pedig az első „cirógatási kvantumtól” eltörik a nyaka. Gyengédebb simogatásra nincs módunk, hiszen az energiaegység (hatáskvantum) törtrészei nem elérhetők. Látszik, hogy a világ „finomságát” a hatáskvantum nagysága határozza meg.

A mi Világegyetemünk „finomabb” világ, a minimális hatás a mikrofizikai folyamatok energiaskálájába esik. Ez az oka annak, hogy egy könyvet bármilyen magasra helyezhetünk, a megengedett energiaállapotok olyan közel vannak, hogy

a diszkrét energiaállapotok a makrovilágban összefolynak látszanak.



3.3. ábra. A vonalas színkép előállítás és a hidrogén színképe

3.1.5. A de-Broglie-féle hipotézis

Louis de-Broglie gondolt először arra, hogy ha a fény hullámtulajdonsága mellett részecsketulajdonságot is mutat, akkor feltételezhető az

is, hogy ennek analogonjára *minden részecskéhez hullámot lehet rendelni*⁴. Egy hullámot – esetünkben – akkor tekintünk adotttnak, ha tudjuk a hullámhosszát. A fotonhipotézis alapján a foton impulzusának és energiájának kapcsolata (3.2) szerint: $p = \frac{h\nu}{c}$. A klasszikus hullámtanból pedig tudjuk, hogy $\lambda\nu = c$, így ezek kombinációjából:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}. \quad (3.8)$$

Ez a híres *de-Broglie féle hullámhossz*, a képlettel minden testhez (objektumhoz, részecskéhez) hullámot rendelhetünk. A fenti „leveletés” azonban *nem* bizonyítás, hiszen a fotonra adott impulzusképlet sem bizonyított, valamint nincs jogunk az eredményt fotonról bármely testre általánosítani. Az elmélet nem segít elképzelni az anyaghullámot, és arra sem ad magyarázatot, hogy mikor kell részecskének és mikor – a fenti hullámhosszal definiált – hullámnak tekinteni egy testet. Így de-Broglie ötlete sem egyéb mint munkahipotézis, amely merészen általánosít – és néhány esetben eredményre vezet.

Példa

Nézzünk meg két konkrét példán a de-Broglie hullámhossz értékeit. Egy 2,5 tonnás autó de-Broglie hullámhossza, miközben $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val halad:

$$\lambda_{\text{autó}} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 28 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 9,5 \cdot 10^{-39} \text{ m}. \quad (3.9)$$

Egy felgyorsított elektron sebessége legyen $v = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, tehát impulzusa $p = 1,71 \cdot 10^{-23} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ekkor de-Broglie hullámhossza:

$$\lambda_{\text{elektron}} = 0,36 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,36 \text{ \AA}. \quad (3.10)$$

3.1.6. A korrespondencia elv

A fenti példa alapján látható, hogy egy makroszkopikus testhez (autóhoz) rendelt de-Broglie

⁴Ez azért figyelemreméltó eredmény de-Broglie-tól, mert a tárgyalt kísérletek jó részét nem ismerte.

hullámhosszérték érzékelhetetlenül (detektálhatatlanul) kicsi. Makrovilágunkban, ahol az impulzusok (a nagy tömegek miatt) több tíz nagyságrenddel esnek a Planck-állandó értéke fölé, a testekhez rendelt hullámhosszak olyan kicsik, hogy

nem érzékeljük a nagy tömegű testek hullámként való viselkedését.

Azoknál a testeknél viszont, amelyeknek impulzusa a Planck-állandóval összemérhető⁵, már érdekes tulajdonságokat mutathatnak – a de-Broglie elmélet szerint, hiszen a mikrorészecskékhez rendelt hullámhosszértékek már atomi nagyságrendekbe esik (egy atom átmérője kb. Ångströmnyi), így

az atomok világában a mikrorészecskék hullámtermészetének fontos szerepe lehet.

Megfigyelhető, hogy a de-Broglie hipotézis a mikrovilágban új jelenségeket ír(hat) le, azonban makroszinten érvényben hagyja a klasszikus fizikát. Ezt a későbbiekben megköveteljük minden új elképzeléstől is, hiszen egy új elméleti konstrukció nem kerülhet ellentmondásba a makrovilágban jól működő klasszikus fizikával – valamint mindennapos tapasztalatainkkal.

Ezek alapján kimondhatjuk, hogy a mikrovilágot leíró törvényeknek atomi méretekhez képest nagy tömegek és nagy távolságok esetén a klasszikus mechanika törvényeibe kell átmenniük. Ez a *korrespondencia-elv*.

3.2. A kvantummechanika elemei

Az előző fejezetekben láttuk, hogy egy adott fizikai objektum (az autótól a fotonig) esetén részecske és hullámtulajdonságok egyaránt felép(het)nek, és ezt a klasszikus fizika eszközeivel nem tudjuk magyarázni. A bemutatott próbálkozások nem szakítanak „eléggő” a klasszikus alapokkal, eredményük nem kielégítő, így szükséges egy teljesen új fizikai eszközrendszert kidolgozni. Ennek *egyszerre* meg kell magyaráznia a részecske- és hullámképet,

⁵Ez a mikrorészecskék világa.

és tájékoztatnia kell arról, hogy melyiket mikor lehet használni. Ezen kívül meg kell ragadni azt a mélyebb *közös* formát, amelynek lehetséges megnyilvánulása a részecske- és a hullámállapot is! Erre lesz alkalmas a következő alfejezetben bevezetendő hullámfüggvény.

3.2.1. A hullámfüggvény

A részecskék klasszikus leírásának alapja a tömegpont⁶ fogalma. Ez azonban csak mint matematikai modell állhatja meg a helyét, ugyanis a pont nem bír kiterjedéssel, így a valós világot leíró fizika számára nehezen értelmezhető.

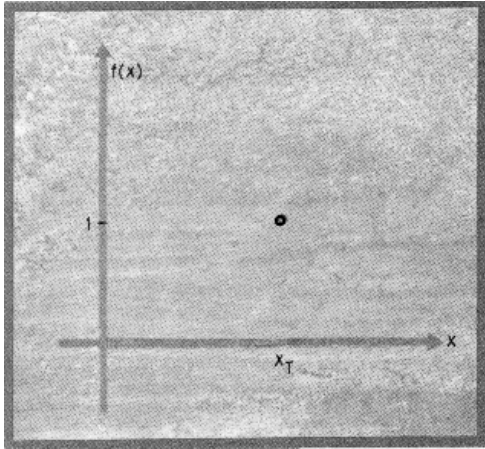
Próbáljuk megadni egy x -tengelyen elhelyezkedő tömegpont (T) helyzetét. Klasszikusan ezt úgy foghatjuk fel, hogy koordinátarendszerünk $x = x_T$ pontjában „van” a tömegpont, attól bármilyen kis távolságra már „nincs”. Próbáljunk bevezetni egy $\Psi(x)$ függvényt, mely jellemzi a test helyzetét. Ezt úgy szeretnénk definiálni, hogy ahol a részecske „van”, ott 1 legyen az értéke, mindenhol más hol pedig nulla. Ekkor nyilvánvalóan a függvény elég furcsa, az $x = x_T$ pontban szakadásos lesz, ott egy értéket vesz fel, minden más pontban pedig nullát, lásd 3.4. ábra!

A természet azonban „szereti” a folytonosságot, így szinte kézenfekvő a „javítás” módja. Csináljunk egy hegyes, de folytonos függvényt, írja le ez a részecske helyzetét. A tömegpont ezentúl már nem tömegpont, eltűnt a kiterjedés nélkülség problémája, lásd a 3.5 ábrát!

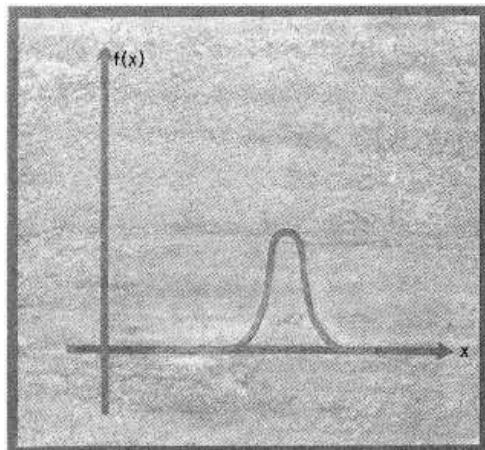
Vizsgáljuk meg, hogy mi volt a javítás „ára”. Mivel a helyet megadó függvényt úgy definiáltuk, hogy ahol „nincs” részecske ott nullát vegyen fel, ahol pedig van, ott nullától különböző értéket, így látható, hogy a fizikai objektumunk „szétterjedt”, „elmosódott” lett, úgy tűnik, mintha *nem csak egy* pontban lenne megtalálható(?).

Hogyan értelmezzük tehát azt, hogy a test kiterjed, a tömegpont elmosódik. Biztosan nem arról van szó, hogy a test mérete

⁶A tömegpont természetesen idealizáció, bevezetését a célszerűség indokolja, ugyanis a klasszikus mechanikában egy kiterjedt testet a test súlypontjába helyeztünk le, amely ezután matematikailag már egyszerűen kezelhető.



3.4. ábra. A szakadásos helyfüggvény



3.5. ábra. A folytonossá tett helyfüggvény

megnő, anyaga „folyni kezd”, „hol itt van, hol ott”... Max Born nyomán a fenti, helyet meghatározó komplex értékű Ψ függvénynek – a hullámfüggvénynek – valószínűségi értelmezést adunk. Azaz

egy adott \mathbf{r} pont egy $dx dy dz$ elemi környezetében a test $|\Psi(\mathbf{r})|^2 dx dy dz$ valószínűséggel tartózkodik.

Ennek bevezetésével ezentúl bármely test helyét egy dimenzióban nem egy számmal (három dimenzióban nem három számmal), hanem egy folytonos függvénnyel⁷ adjuk meg,

⁷Egy dimenziós esetben ez egy egyváltozós függvény, míg három dimenzióban három változós.

ami ott vesz fel nem nulla értéket ahol a test van (lehet).⁸

Milyen tulajdonságokat kell megkövetelni a hullámfüggvénytől? Mivel egy objektum egy adott koordinátájú pontban csak egy adott valószínűséggel fordulhat elő, így a hullámfüggvénynek a tér minden egyes pontjához egyértelműen hozzá kell rendelnie egy értéket (komplex számot):

$$\Psi(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{C} \quad (3.11)$$

A második tulajdonság abból fakad, hogy a testet meg kell találni. Így ha a tér minden egyes \mathbf{r} pontjában összeadom a megtalálási valószínűségeket, az eredmény egy kell, hogy legyen, azaz:

$$\int_V |\Psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1 \quad (3.12)$$

Bevezetve a hullámfüggvényt és annak valószínűségi értelmezését, a hétköznapi tapasztalatainkkal látszólag ellentmondásba kerültünk. Ugyanis hiába meresztjük szemünket bármely, a környezetünkben lévő tárgyra, nem látjuk elmosódni, kiterjedni, „hol itt – hol ott lenni”. Ennek magyarázata abban keresendő, hogy makrovilágunkban – a számítások szerint – ennek az elmosódásnak a mértéke sok-sok nagyságrenddel kisebb, mint a szemünk által érzékelhető mérettartomány.

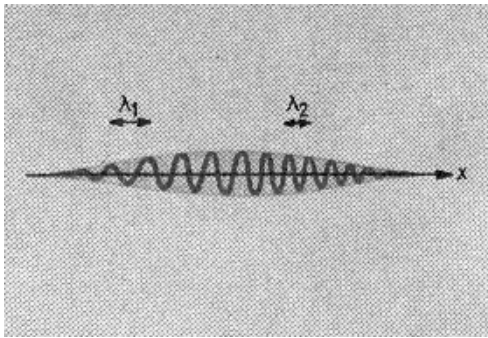
A fentiek alapján úgy tűnhet, hogy a kvantummechanikában tett első lépésünk értelmetlen volt. Ez azonban két dolog miatt sincs így. Egyrészt komoly fogalmi különbség van a hely koordinátáival illetve függvénnyel való megadása között. Másrészt a mi makroszkopikus világunkra ugyan nincs közvetlenül megfigyelhető hatása, a mikroszkopikus mérettartományok világát az új elmélet azonban teljesen átformálja; a további fejezetekben ezt próbáljuk érzékeltetni egyszerűbb jelenségek bemutatása révén.

⁸Vegyük figyelembe, hogy a hely mint függvény csak a pontszerűséghez képest határozatlan, matematikailag a függvény és a pont is ugyanolyan konkrét, határozott valami.

3.2.2. A hullámfüggvény és az impulzus

A hullámfüggvény egy adott pontban felvett értéke – az előzőek alapján – kapcsolatban van az előfordulás valószínűségével. Ha azonban a hullámfüggvényt egy fizikai rendszer teljes leírójának akarjuk használni, akkor számot kell adnia a kérdéses objektum helye mellett annak impulzusáról is. Hogyan rejti magában a hullámfüggvény az impulzust? Nem a szélességében vagy a magasságában, hiszen azok az előfordulás helyével és valószínűségével állnak kapcsolatban! A görbe szerkezete azonban adhat további információkat.

Amint a pontosabb vizsgálatok megmutatják a hullámfüggvénynek *finomszerkezete* van, amit mi az előbbiekben vizsgáltunk, az csak ennek az oszcilláló, hullámszerű szerkezetnek a burkológörbéje, lásd 3.6. ábra.



3.6. ábra. Az impulzus

Mint megmutatható sűrűbb – kisebb hullámhosszúságú – fésűfogazat esetén a hullámfüggvény által leírt test „nyugtalanabb”, tehát impulzusa nagyobb. „Simább” finomszerkezet – azaz nagyobb hullámhosszúságú fésűfogazat – esetén a leírt test „nyugodtabb”. Tehát

a hullámfüggvény finomszerkezetének kisebb hullámhosszához a test nagyobb impulzusa, míg nagyobb hullámhosszához a test kisebb impulzusa tartozik.

Mint levezethető az impulzus és a hullámhossz közötti arányossági tényező éppen a Planck-állandó, így:

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (3.13)$$

Látható, hogy de-Broglie korábban már ugyanerre az eredményre jutott, azonban az nem egzakt fizikai megfontolások nyomán született, így – bár fenti eredményünk alakilag azonos azzal –, jelentéstartalmát tekintve teljesen más.

A figyelmes Olvasó rögtön észreveheti, hogy a hullámfüggvénynek bele kell simulnia a koordinátatengelyekbe⁹. Így az impulzust kódoló belső mintázathoz sem rendelhető egyértelmű hullámhossz – lásd a 3.6. ábra λ_1 és λ_2 hullámhosszait –, hiszen az nem szabályos periodikus görbe.¹⁰ Ezek szerint egy adott állapothoz több impulzus is rendelhető, azaz a mikrovilágban

nem csak a hely, hanem az impulzus is bizonytalan.

Most már elég információ áll rendelkezésünkre ahhoz, hogy a hullámfüggvény mozgását meghatározhassuk. Ha a testnek impulzusa van, akkor sebessége is van, azaz helye változik. Ez a hullámfüggvényben úgy jelenik meg, hogy a hullámfüggvény nem nulla része „mozog” az x -tengely mentén. Ha az impulzus nagyobb, azaz a mintázat sűrűbb, az egész „hullámcsomag” gyorsabban mozog, ha az impulzus kisebb, lassabban, ezt mutatja be a 3.7. ábra. Vegyük észre, hogy a hullámfüggvény milyen kompakt információhordozó. Nem csak a helyet, hanem az impulzust is tartalmazza.

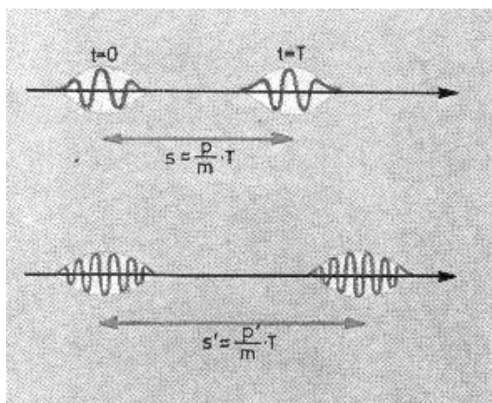
Ezzel érthetővé válik a „hullámfüggvény” szóhasználat oka. A test hullámfüggvénye ugyanis úgy mozog, mint a víz felszínén terjedő hullám. Jelentéstartalma azonban ennél jóval mélyebb, az analógia nem lényegi. Míg a víz hullám csak a víz részecskéinek kitérésváltozása, addig a hullámfüggvény az általa leírt test koordinátáját és impulzusát hordozza, azaz (talán) maga a test.

3.2.3. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció

Mint láttuk a kvantummechanikában sem a koordinátának, sem az impulzusnak nincs éle-

⁹Ha nem így lenne, a test bármely ponttól végtelen távol nem nulla valószínűséggel megtalálható lenne, ez pedig lehetetlen.

¹⁰A későbbiekben fontos lesz, de már most vegyük észre, hogy a periodicitást a „régek” rontják el, a „közelepsi rész” periodicitása megfelelő.



3.7. ábra. Nagy és kis impulzusú hullámfüggvények

sen meghatározott értéke. Próbáljunk felállítani egy korlátot arra, hogy – elvileg¹¹ – melyiket milyen pontossággal határozhatjuk meg. Az impulzus-bizonytalanságot az okozta, hogy a hullámfüggvény finomszerkezetét alkotó hullámhoz nem rendelhető egyértelmű hullámhossz. Azonban érezhető, ahogy a burkolót „kinyújtjuk”, egyre több szabályos periódus fér el belül, és a periódus „hibáját” okozó vég-effektusok relatív szerepe lecsökken. Mivel a burkoló kinyújtása azt jelenti, hogy a helybizonytalanságot megnöveljük, így azt láthatjuk, hogy

az impulzus bizonytalanságának csökkentése a helybizonytalanság növekedését vonja maga után.

Teljesen hasonló a fenti helyzet „párja” is. Ha a helybizonytalanságot csökkentendő a burkolót összehúzzuk, a finomszerkezet (impulzus) hibája megnő, hiszen a periodicitást elrontó „szélek” hatása egyre nagyobbá válik, azaz

a helybizonytalanságot csökkentve az impulzus bizonytalansága növekszik.

Bevezetve a hely illetve az impulzus bizonytalanságára a Δx és Δp jelölést, eredményünket a $\Delta x \cdot \Delta p = \text{állandó}$ formában is felírhatjuk. A pontos számítások W. Heisenberg nevéhez fűződnek és az alábbi eredményre vezetnek

¹¹Az elméleti fizika szempontjából mindegy, hogy konstruáltak-e már készüléket a mérésre, vagy érdemes-e megmérni.

(ahol Δp_x jelenti az impulzus x komponensének bizonytalanságát):

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (3.14)$$

Három dimenzióban a fenti képlet igaz külön-külön mindhárom koordinátára és impulzusra, azaz kiegészítve:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.15)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (3.16)$$

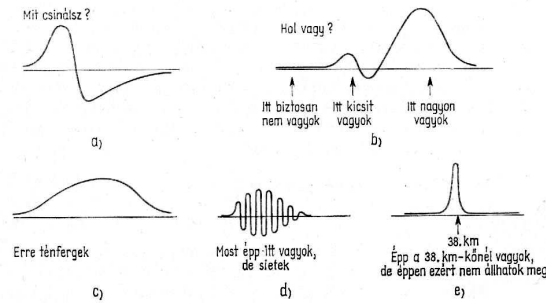
Ezek a *Heisenberg-féle határozatlansági relációk*, amelyet gyakran komplementaritási elvként is szoktak említeni. Ennek oka az, hogy a koordináta- és az impulzus pontossága csak *kiegészítő* módon tehető nagyvá.

Akit a hullámfüggvény finomszerkezetéről leírtak nem győztek meg eléggé azok számára az alábbiakban további *kiegészítő* megjegyzések találhatók. Mint az belátható (lásd Fourier-analízis) különböző – adott hullámhosszú – hullámok szuperponálásával bármilyen hullámmintázat így például egy részecskét jellemző hullámcsomag is össze-rakható. Ahol a – megfelelő módon összeválogatott, majd egymásra helyezett – hullámok kitérései erősítik egymást ott lesz a hullámcsomag kitérése, a többi helyen az összetevők kioltják egymást. Mint azonban – matematikailag egzaktan – belátható minél rövidebb hullámcsomagot akarunk kialakítani annál több különböző hullámhosszú szabályos hullámot kell venni. Ezt lefordítva a fizika nyelvére látható, hogy ha kicsi helybizonytalanságot szeretnénk elérni (szűk hullámcsomag), akkor sok különböző hullámhosszúságú összetevőm lesz, tehát nagy lesz az impulzus bizonytalansága.

A határozatlansági relációk hatása a makroszkopikus mérések kimenetelére teljesen érzékelhetetlen és figyelmen kívül hagyható, a mikrovilágban azonban komoly hatásai vannak. Ha ugyanis egy elektron helyét egy nanométer (10^{-9} m) pontossággal megmértem, akkor impulzusának bizonytalansága akkora lesz, hogy egy másodperccel később akár 100 km távolságban is lehet.

3.2.4. A mérés és a határozatlanság

A határozatlansági relációnak tehát komoly fizikai és filozófiai kihatása van. A belőle kiinduló fizikai és filozófiai problémafelvetések legalább akkora forradalmat okoztak a természettudományos közgondolkodásban, mint az einsteini relativitáselmélet. Ahhoz, hogy ebbe betekintést nyerhessünk, meg kell vizsgálni a



3.8. ábra. A hullámfüggvény meghatározza az előfordulás valószínűségét és az impulzust is

mérés és a mérhetőség – klasszikus és kvantummechanikai – fogalmát.

A klasszikus fizika tanítása szerint a mérés pontosságának *egyetlen* korlátja a mérőműszerünk pontatlansága, tehát jobb mérőműszerrel pontosabb eredményt tudunk elérni. Valamint annak sincs akadálya, hogy a koordinátát és az impulzust egyszerre (egyidőben) mérjem meg. (Az „egyszerre” kitétel fontossága hamarosan kiviláglik.)

A kvantummechanikában azonban ez nem így van. Képzeljük el, hogy egy részecske helyét nagy pontossággal megmértem. Ez azt jelenti, hogy helyét meghatároztam, azaz helyének bizonytalanságát (Δx) lecsökkentettem. A határozatlansági relációk miatt azonban ekkor a részecske impulzusának bizonytalansága megnő. Minél pontosabban mértem meg tehát a részecske helyét (csökkentem a helybizonytalanságát), impulzusának bizonytalansága annál nagyobb lesz, azaz impulzusáról annál pontatlanabb mérési eredményt tudok csak adni. Ugyanez fordítva is fennáll. Egy részecske impulzusát egyre pontosabban megmérve, a részecske helyéről fogok egyre kevesebbet tudni.

Ha a koordinátát és az impulzust egyszerre szeretném mérni, kompromisszumot kell kötnöm, meg kell elégednem két pontatlan adattal.

Hangsúlyoznunk kell azonban, hogy a makrovilágban a tételnek *nincs* gyakorlati jelentősége, makroszkopikus objektumokon továbbra is tetszőlegesen közeli időpontokban és céljainknak elegendően pontosan mérhető az im-

pulzus és a koordináta, lásd *korrespondencia-elv!*

Példa

A fentiek illusztrálására vizsgáljuk meg, hogy egy biciklijével együtt 80 kg-os biciklista helyét milyen pontossággal tudom megmondani, ha sebességmérésem pontossága: $\Delta v = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ekkor $\Delta p = m\Delta v = 40 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$. A határozatlansági reláció alapján:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2\Delta p} \sim 10^{-36} \text{ m.}$$

Ez a szám olyan kicsi, hogy nem csak megmérni, elképzelni sem lehet. Ha azonban mikrorészecskékre alkalmazzuk a határozatlansági relációt, a helyzet gyökeresen megváltozik. Például vegyünk egy atom külső elektronjait. Kiválasztva egyet megmérjük a sebességét, mérésünk bizonytalansága¹² legyen $10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Az elektron tömegét behelyettesítve $\Delta p \sim 10^{-29}$ nagyságrendű. A határozatlansági relációból:

$$\Delta x \sim 5 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 50 \text{ \AA}.$$

Ez a távolság az atomi méretekhez képest óriási, megfelel 50 atomi átmérőnek! Látható, hogy az elektron sebességét pontosan mérve a határozatlansági reláció komolyan szerephez jut, mivel a hely bizonytalanságát nagyon komolyan megnöveli, olyannyira, hogy azt sem tudjuk megmondani, hogy a mért elektron melyik atomhoz tartozik.

Mint nyilvánvaló, a kvantummechanikai megközelítés csak ott értelmes és célszerű, ahol a határozatlansági összefüggések okozta bizonytalanságok nem esnek az atomi mérettartományok alá. A kvantummechanikai megközelítés alkalmazásának célszerűségét a vizsgált test tömege dönti el, ugyanis:

$$\Delta x \Delta v \geq \frac{\hbar}{2m}.$$

Ha a tömeg hétköznapi tartományokba esik ($m = 10^{-5} \text{ kg} \dots 10^5 \text{ kg}$), akkor a jobb oldal $10^{-29} \dots 10^{-39}$ nagyságrendű, azaz ilyen

¹²Ez az elektron sebességének nagyságrendjéhez képest pontos mérésnek számít.

méretű bizonytalanságok fordulhatnak elő a helykoordinátában vagy a sebességében. Ez mérhetetlenül és elképzelhetetlenül kicsi, így a hétköznapi tartományokban a kvantummechanika helyett nyugodtan használhatjuk tovább a klasszikus mechanikát. (Ez ismét a korrespondencia elv!) Azonban egy elektron esetén, amelynek tömege 10^{-31} kg nagyságrendjébe esik, a bizonytalanságok már 10^{-4} rendűek, és ezek már számottevőek lehetnek, tehát a mikrovilágban kizárólag a kvantummechanika illetékes.

3.2.5. A határozatlansági reláció következményei

A határozatlansági relációnak azonban nem csak a fent bemutatott „elméleti” következményei vannak. Olyan meglepő eredményekre is vezet, melyek teljes ellentmondásban vannak hétköznapi tapasztalatainkkal. A kvantummechanikában

eltűnik a pálya fogalma

amelyet a makrofizikában és a hétköznapiakban oly természetesnek tartunk.

Egy test pályáját úgy tudjuk meghatározni, hogy minden egyes pontban megmérjük a sebességét, amely kijelöli, hogy a következő időpillanatban hol lesz. Itt sebességét újból meghatározva adódik a következő pillanatbeli koordináta, s.i.t. A határozatlansági reláció azonban erre nem ad lehetőséget, hiszen ha – elég pontosan – meg szeretném mérni a test sebességét, akkor a mérés után a helyéről már nem állíthatok semmit, így a pálya megkonstruálhatatlan. Ha a helyét mérem meg, akkor a sebességének bizonytalansága nő meg, és ezért nem tudom meghatározni a következő időpillanatbeli helykoordinátáját.

Tehát a kvantummechanika a mikrovilágban eltörli a pálya fogalmát, elképzelhetlenné téve egy részecske útját. Ezért használják sokszor a haladás helyett *terjedés* fogalmát, amely kissé közelebb áll a valóságos – talán nem is elképzelhető – képhez.

A határozatlansági relációnak a mérés technikában is komoly következményei vannak. Minél jobban fel szeretnénk tární egy anyag finomszerkezetét a megfigyeléséhez annál kisebb hullámhosszúságú fényre (sugárzásra)

van szükség. Ha ugyanis egy Δx kiterjedésű tárgy (részlet) képét szeretnénk megkapni, akkor olyan fényt kell alkalmazni, amelynek hullámhossza Δx -nél kisebb. A hullámhossz csökkentése azonban megnöveli az impulzust (ld. de-Broglie összefüggés), így a vizsgálathoz használt hullám roncsolja a vizsgálandó tárgyat. A pontos alakmeghatározás ára tehát a tárgy szerkezetének esetleg pusztulása lehet.

Ahogy az a gyakorlatból is nyilvánvaló, a látható fényvel dolgozó optikai mikroszkópok feloldóképessége a fényhullámhossz nagyságrendjébe (~ 100 nm) esik. Ennél finomabb szerkezetmeghatározáshoz kisebb hullámhosszokra van szükség. Kézenfekvő megoldás lenne a fénynél kisebb frekvenciájú elektromágneses sugárzás, a röntgensugárzás használata ($\sim 10^{-9} - 10^{-10}$ m) ez a röntgenmikroszkópia, amely sugárzás azonban lencsékkel nem fókuszálható, tehát ilyen mikroszkóp gyakorlatilag nem építhető. Használhatunk kelően nagy sebességre gyorsított elektronokat is, ezeknek a hullámhossza a növekvő impulzussal csökken, tehát alkalmasak finom részletek kimutatására. Fókuszálásuk – lévén töltött részecskék – elektromos illetve mágneses terekkel lehetséges. Amint az belátható egy kezdősebesség nélkül indított, U feszültséggel gyorsított elektron hullámhossza:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}. \quad (3.17)$$

Így ha 1000 V feszültséggel gyorsítom az elektront, annak hullámhossza $\lambda = 0,35 \cdot 10^{-10}$ m lesz, ami már az atomi méretek nagyságrendje.

A fenti módszerekkel azonban az a probléma, hogy a detektáláshoz használt részecskék nagy energiákat szállítanak, így roncsolhatják a vizsgálandó mintát. Látható, hogy minél jobban csökkentem a hullámhosszat (javítom a helymeghatározást), annál inkább növelem a szállított energiát, tehát a roncsolóképességet.

A felgyorsított elektron hullámhosszára vonatkozó képlet igazolása az alábbiak szerint lehetséges. Az U feszültség hatására az e töltésű elektron eU energiára tesz szert, ami mozgási energiává alakul (v.ö. (1.20)): $eU = \frac{1}{2}mv^2$. Ebből az elektron végsebessége: $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. A de-Broglie-féle összefüggés szerint: $\lambda = \frac{h}{mv}$, azaz $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$.

3.2.6. Egyszerű kvantummechanikai rendszerek

Dobozba zárt elektron

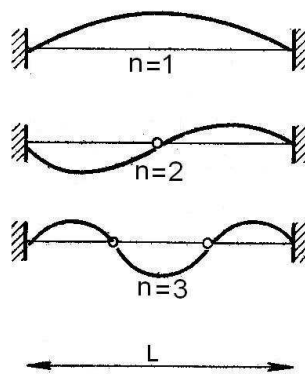
Tegyük fel, hogy egy részecskét bezárunk egy végtelen mély potenciálgödörbe. Ez azt jelenti, hogy a részecske csak a tér egy meghatározott L szélességű tartományában tartózkodhat, és ott potenciális energiája nulla. Hétköznapi példaként gondolhatunk egy drótdarabra, vagy egy atomokból felépült hosszú láncre, (például konjugált kötésrendszerű molekulák) amelyben az elektronok – Marx György szavával élve – mint „futópályán” az adott térrészben szabadon mozoghatnak.

Erre az egyszerű rendszerre a kvantummechanika alapegyenlete – a hullámfüggvény tér- és időbeli dinamikáját leíró Schrödinger egyenlet – egyszerűen megoldható és amint az belátható *elektron állóhullámok* keletkeznek.

Ezt úgy kell elképzelni, hogy az elektron hullámfüggvénye olyan alakot vesz fel, mint egy megfeszített húron kialakuló hullámmintázat – azaz a végpontokban csomópontok vannak, közöttük pedig szinuszosan változik. A részecske – $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ kvantumszámmal indexelt – hullámfüggvényei (eltekintve egy számunkra lényegtelen szorzótól):

$$\Psi_n(x) \sim \sin n \frac{\pi}{L} x \quad (3.18)$$

alakúak, ezt mutatja be a 3.9. ábra.



3.9. ábra. Dobozba zárt elektron hullámfüggvénye. Alapharmonikus és az első két felharmonikus.

Az n főkvantumszámmal indexelt állapotban lévő elektron energiája pedig:

$$E_n = E_1 n^2, \quad \text{ahol } E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL} \quad (3.19)$$

A fenti megoldással kapcsolatban az alábbi megállapításokat tehetjük:

1. A részecske (elektron) csak egymástól számtottveően különböző (*diszkrét*) állapotokban tartózkodhat.
2. Amint látható alapállapotban ($n = 1$) a részecskét legnagyobb valószínűséggel a doboz közepén találjuk meg, míg a szélek felé haladva a megtalálási valószínűség csökken.
3. A különböző kvantumállapotokhoz tartozó hullámfüggvények olyan szinuszfüggvények, melynek a potenciáldobozon belül ($n - 1$) nullhelye, *csomópontja* van. Itt a részecske megtalálási valószínűsége nulla, a többi pontokban pedig a hullámfüggvény négyzetével arányos – tehát pozitív, hiába vesz fel a hullámfüggvény maga negatív értéket is.
4. Bármely dobozba zárt elektron hullámfüggvénye mindig előállítható a fenti hullámfüggvények lineáris kombinációjával: $\Psi = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + c_3 \Psi_3 + \dots$
5. A részecske *energiaszintjei diszkrét*! Energiája csak egy adott E_1 érték (alapállapot energiája) egész számú többszöröse lehet (kétszeres, négyszeres, ...). A részecske energiája *nem* lehet nulla!
6. Ha a részecske az n . kvantumszámmal jellemzett állapotból az m . kvantumszámmal jellemzett állapotba megy át, energiájának megváltozása:

$$\Delta E = E_m - E_n = E_1 (m^2 - n^2) \quad (3.20)$$

Tehát a részecske *csak jól meghatározott energiák felvételére illetve leadására képes*. E közötti energiaértékek nem elérhető számára, v.ö. a hidrogén színképénél leírtakkal.

7. A doboz méretének csökkentésével a részecske alapállapot energiája (így minden energiaszintje) növekszik. Ez a határozatlansági relációval egyszerűen magyarázható.

A doboz méretének csökkentésével a részecske helybizonytalansága csökken, így impulzusbizonytalansága növekszik, azaz egyre nagyobb valószínűséggel vesz fel nagy energiaértékeket.

Vizsgáljuk meg a kvantumosság vonatkozásait és következményeit két egyszerű, egy mikrovilágból és egy makrovilágunkból vett példán keresztül.

Tekintsünk egy $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg tömegű elektront egy atom potenciáldobozába zárva. Ennek mérete legyen $L = 10^{-9}$ m. Ekkor alapállapot energiája:

$$E_1 = 2 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,3 \text{ eV.}$$

Ahhoz hogy az elektron alapállapotból ($n = 1$) az első ($m = 2$) illetve a második gerjesztett állapotba vigyük ($m = 3$),

$$E_{1 \rightarrow 2} = E_1(2^2 - 1^2) = 3E_1 = 3,9 \text{ eV}$$

illetve

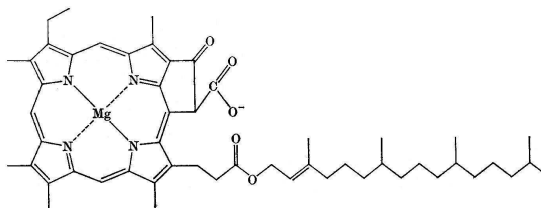
$$E_{1 \rightarrow 3} = E_1(3^2 - 1^2) = 8E_1 = 11,4 \text{ eV}$$

energia szükséges. E két energiaérték kivételével más energiák *nem felvehetők* az elektron számára (kivéve természetesen a további gerjesztett állapotok diszkrét energiáit).

A természet színei is a fenti diszkréttségnek köszönhetők. Bizonyos színyanyagokban (klorofill, porfín) az elektronok akkora energiával gerjeszthetők amelyeket a látható fény (kb. $\lambda = 660$ nm hullámhosszú, $E = h\frac{c}{\lambda} = 1,8$ eV energiájú) fotonjai tartalmaznak. A klorofill elektronjait a 400-500 nm, valamint a 600-700 nm közötti fotonok¹³ tudják gerjeszteni, így azokat elnyeli. Ezért a fehér fényvel megvilágított klorofill színyanyagú növények – mivel a vörös és kék fényt elnyelik a többit visszaverik – zöldnek látszanak. Az atomok és a kisméretű szerves molekulák legtöbbször csak ultraibolya fényvel lehet gerjeszteni. Ennek oka az, hogy kis méretük miatt nagy a gerjesztési energiájuk, lásd 7. pont. Így ezek a látható fény egyetlen összetevőjét sem nyelik el, tehát fehérnek látszanak.

Makroszkopikus testre, például egy grammos sörétszemre ($m = 10^{-3}$ kg) és makroszkopikus, centiméteres „dobozra” ($L = 10^{-2}$

¹³Az elnyelés maximumai függenek attól, hogy klorofill-a vagy klorofill-b molekuláról van szó.



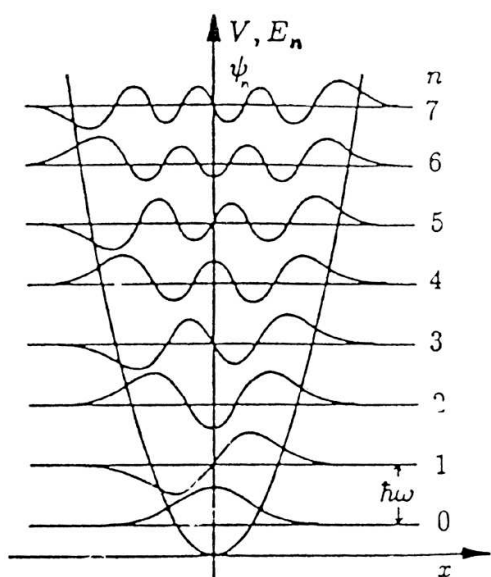
3.10. ábra. A klorofill-molekula négyzet alakú tere (bal oldalt). Az ide bezárt elektronok pontosan a vörös fény energiájával gerjeszthetők.

m) az alapállapot energiája $E_1 \approx 4,4 \cdot 10^{-60}$ J. Ebből következően a gerjesztési energiák is 10^{-60} J nagyságrendjébe esnek. Finom mérési módszerekkel az eV nagyságrendje (10^{-19} J) detektálható. Ahhoz, hogy ilyen nagyságrendű energiváltozást kaphassunk, nagyságrendileg 10^{20} (egymilliárdszor egymilliárd) energiaszintet kell átlépni. Mint látható ez óriási szám, azaz a makrovilágban olyan sűrűn vannak a *diszkrét energiaszintek* (esetünkben például 10^{-60} J távolságban), hogy azok *összefolyvni látszanak*.

Harmonikus oszcillátor

Vizsgáljuk meg a harmonikus oszcillátort a kvantummechanika keretein belül. A klasszikus tárgyalás megtalálható a jegyzet *Hullámtan* részében. A kvantummechanikai tárgyalás bonyolult, így itt csak az eredmények néhány vonatkozását mutatjuk be. A hullámfüggvények itt is egy n kvantumszámmal indexelhetők, azonban, történeti okokból – a dobozba zárt részecskétől eltérően – a legkisebb energiájú állapot kvantumszáma: $n = 0$, így itt éppen ez adja meg a (bonyolult és emiatt nem részletezett alakú) hullámfüggvény csomópontjainak a számát, lásd 3.11. ábra 0-ás sora. Látható, hogy alapállapotban a legvalószínűbb megtalálási hely a centrum. Nagyobb kvantumszámú (gerjesztett) állapotokban a nagyobb valószínűségű helyek periódikusan változnak. Megfigyelhető, hogy a hullámfüggvény a centrumtól távolodva (exponenciálisan, tehát gyorsan) lecseng, azonban a klasszikusan elérhető tartományon (a parabolán belüli területen) „túl lóg”, azaz a kvantummechanikai oszcillátor kicsi de nem nulla valószínűséggel olyan helyeken is („az ampli-

túdón kívül”) megtalálható, amelyek a klasszikus oszcillátor számára tiltottak. Ez tipikus kvantumsajátság. Oka abban keresendő, hogy a helybizonytalanság kicsi volta miatt nagy az impulzus bizonytalansága, amely e miatt kis valószínűséggel ugyan, de igen nagy értékeket is felvehet. Erre utal az, hogy a hullámfüggvény exponenciális lecsengésű, azaz rohamosan tart a tengelybe, azonban szigorúan nulla értéket nem vesz fel (csak a csomópontokban).



3.11. ábra. A harmonikus oszcillátor energiaszintjei és hullámfüggvényei

A kvantummechanikai tárgyalás keretében az oszcillátor energiájára az alábbi kifejezést nyerjük:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu \quad (3.21)$$

Mint látható az oszcillátor energiája a kvantumszám növelésével egyenletesen növekszik.¹⁴ Figyeljük meg, hogy itt is jelentkezik az alapállapot energiája, azaz $n = 0$ mellett is van a részecskének energiája. Ez az

¹⁴A képletet igazolták kétatomos molekulák rezgési spektrumával. Ugyanis a kétatomos molekulák közötti kötőerő tekinthető harmonikusnak. Ekkor egy $n \rightarrow n - 1$ rezgési átmenet során kibocsátott foton energiája éppen $E_n - E_{n-1} = \hbar\omega$, a kísérleti eredménnyel teljes összhangban.

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ az úgynevezett *zérusponti energia*, amely egy harmonikus oszcillátor legkisebb energiája. Az a meglepő helyzet áll elő – a makrofizikával ellentétben –, hogy egy kvantummechanikai rendszer minimális energiája nem lehet nulla, valamint a harmonikus oszcillátor – mint rendes kvantum rendszer – csak diszkrét adagokban tud energiát felvenni, tehát n . állapotból az m -be való átmenet során az energiakülönbség:

$$\Delta E = \hbar\omega(m - n) = h\nu(m - n) \quad (3.22)$$

Harmonikus oszcillátor számára a legkisebb felvehető energiaadag: $\hbar\omega = h\nu$ Makroszkopikus testekre és energiákra itt is megjelenik a korrespondencia elv, tehát a diszkrét energiaszintek összefolynak. (Ezt az érdeklődő Olvasó könnyen igazolhatja az $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ képlet segítségével.)

A harmonikus oszcillátor $h\nu$ gerjesztési energiája nem véletlenül emlékeztet a fotonok (3.1) energiakifejezésére. Az elektromágneses teret úgy képzelhetjük el, hogy annak minden „módusa” (hullámszámmal/frekvenciával adott állapota) egy-egy harmonikus oszcillátor. Egy újabb foton hozzáadása a módushoz a harmonikus oszcillátor egy energiaszinttel való feljebb gerjesztésének felel meg.

A modern fizika nagy lezáratlan kérdései közé tartozik, hogy mi is van az elektromágneses tér (és egyéb teretek) zérusponti energiájával. Vannak esetek amikor ez a zérusponti energia kísérletileg kimutatható. A végtelen sok módus összesen végtelen sok zérusponti energiája által keltett végtelen nagy gravitációs teret viszont nem látjuk... Az univerzum tágulásának vizsgálata azonban arra utal, mintha egy *nagyon kicsi* zérusponti energia mégis csak lenne a vákuumban.

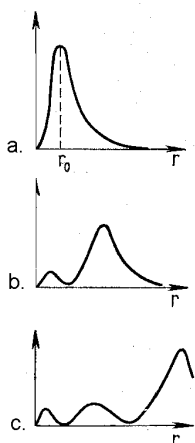
3.2.7. A hidrogénatom, atomi hullámfüggvények

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk a legegyszerűbb atomi elektronrendszer, a hidrogénatom elektronjának viselkedését.

A newtoni klasszikus mechanika keretén belül az elektronra mint töltéssel rendelkező pontszerű részecskére gondolhatunk. Ekkor az volt az elképzelés, hogy az elektron a mag körül körpályán (vagy ellipszispályán) kering, a mag és az elektron közötti elektrosztatikus vonzerőt pedig az elektronra a körpályán való keringése miatt fellépő centrifugális erő egyensúlyozza ki. Ez volt a Rutherford-féle modell, amely úgy gondolt az atommagra és az elektronokra, mint parányi naprendszerre. Azonban Larmor bebizonyította, hogy gyorsuló töltéseknek (ilyen például a körpályán centripetális gyorsulást elszenvedő elektron) sugározniuk kell, azaz energiát kell veszíteniük. Emiatt az

elektronoknak rövid idő alatt be kellene esniük a magba – amit azonban nem tapasztalunk.

A probléma a kvantummechanika keretein belül analitikusan is megoldható, azonban ez matematikailag elég bonyolult, így a továbbiakban megelégszünk egy szemléletes képpel. Az alapállapotú hidrogén-atomban az elektron kettős kényszert érez. Egyrészt a $\lambda = \frac{h}{mv}$ de-Broglie összefüggés szerint nagyobb hullámhossz felvételével igyekszik azt elérni, hogy mozgási energiája minél kisebb legyen, tehát alapállapotban az elektronmintázat kismulni igyekszik. Másrészt a mag elektromos vonzása igyekszik az elektront (illetve hullámfüggvényének a maximumát) a mag közelébe húzni. Ha azonban erősen a mag közelébe húzná, akkor az elektron helye túl jól lenne lokalizálva és így – a határozatlansági reláció értelmében – nagy lenne impulzusának a bizonytalansága és előbb-utóbb a magtól távol „találná magát”. Ebből a kettős harcból születik meg az alapállapotú H-atom gömb alakja.¹⁵ Ebben az állapotban az elektron sugármenti valószínűség-eloszlását mutatja be a 3.12. ábra felső része, ennek a függvénynek a maximuma (az elektron legvalószínűbb radiális távolsága a magtól) tekinthető a H-atom sugarának. Értéke $r_0 = 0,0529$ nm.



3.12. ábra. Sugármenti valószínűség-eloszlás 1s, 2s és 3s állapotokban

¹⁵Természetesen ehhez az is szükséges, hogy a Coulomb-erő gömbszimmetrikus legyen, azonban ez fennáll.

Energia befektetésével gerjesztett állapotot tudunk létrehozni, amelyben a gömbszimmetria megbomlik, helyét más szimmetriák veszik át. A gerjesztett állapotok megjelenése (ahogy azt a dobozba zárt elektronnál és a harmonikus oszcillátornál is láttuk) csomók létrejöttét eredményezi. A Coulomb-erőtér magas forgásszimmetriája miatt *csomósíkok* és *csomógömbök* (a 3.13. ábrán csomókörök) egyaránt létrejöhetnek. (Ezek tehát olyan gömbök és síkok, amelyekben a hullámfüggvény értéke nulla.) A továbbiakban g -vel fogjuk jelölni a csomógömbök számát,¹⁶ míg l -vel a csomólapok számát. Ez a kémiából jól ismert *mellékkvantumszám*. A főkvantumszámot úgy értelmezzük, hogy az a csomók teljes számánál legyen egxel nagyobb:

$$n = g + l + 1 \quad (3.23)$$

így a mellékkvantumszám értéke nullától $n - 1$ -ig terjedhet:

$$0 \leq l \leq n - 1.$$

Az $l = 0$ mellékkvantumszámú, tehát csomólap nélküli elektronállapotok mind gömbölyűek, azaz *szférikusak*, innen a betűjelölésük: *s*. A különböző főkvantumszámhoz tartozó *s* pályákat a kémiában (is) megszokott 1s, 2s, 3s, ... módon jelöljük. Ezeknek a pályáknak a sugármenti valószínűség-eloszlását mutatja be a 3.12. ábra középső és alsó része (vesd össze 3.13. ábra idevonatkozó részeivel). Fontos felhívunk a figyelmet arra, hogy itt és a továbbiakban a „*pálya*” szót nem a hagyományos – klasszikus mechanikai értelemben – használjuk.

Pálya alatt az elektron meghatározott energiával rendelkező valamilyen állóhullám-állapotát, a kötött elektron egyik sajátrezgését értjük.

Az $l = 1$ állapotokban már van egy csomólap is, így nem csak gömbszimmetria fordul bennük elő. Szintén történeti okokból ezeket a pályákat *p* pályának nevezzük. A csomógömb nélküli ($g = 0$) legegyszerűbb gerjesztésnél az elektronállapot rajza síkszimmetrikus,

¹⁶Ezt szokták *radiális kvantumszámnak* is nevezni, mi azonban nem használjuk.

propellerre emlékeztet. Nyilvánvalóan a három dimenzióban ezeknek az állapotoknak három különböző, egymástól lényegesen eltérő, 90° -os forgatással egymásba átvihető helyzete létezik, lásd 3.14. ábra. Ezek a $2p_x$, $2p_y$, $2p_z$ jelű állapotok. (Minden más irányba álló p -pálya már kikeverhető ebből a háromból.) Mivel a Coulomb-energia forgásszimmetrikus, ezeknek a pályáknak az energiája megegyezik.¹⁷ Magasabb főkvantumszám mellett létrejöhethet az egy csomólap mellett csomógömb is, azonban az elmondottak erre az esetre könnyedén kiterjeszthetők, lásd az ábra $3p_x$, $3p_y$ és $3p_z$ állapotait.

Az $l = 2$ állapotokban két, egymásra merőleges csomólap található. A mellékkvantumszám betűjele d . a pálya alakja a legegyszerűbb, csomógömb nélküli ($g = 0$) esetben virágra (talán *dália*) emlékeztet. A d állapotnak a térben öt lényegileg különböző orientációja létezik, a hatodik állapot – amely a z -tengelyen át fektetett két 45° -os csomólap hoz létre – előállítható két állapot szuperpozíciójaként (lásd 3.13. ábra).

A három csomólapú ($l = 3$) pályák az f pályák, itt már hét lényegileg különböző irányultság lehetséges, ezeket az előzőek alapján az Olvasó maga építheti fel.

n	l	g	leírás
1	s	0	alapállapot, nincs csomó
2	s	1	egy csomógömb
2	p	0	egy csomósík
3	s	2	két csomógömb
3	p	1	egy csomósík egy csomógömb
3	d	0	két csomósík

1. táblázat *A kvantumszámok felépülésének sorrendje.*

Mint látható egyszerre különböző típusú gerjesztések is kialakulhatnak (gömb és lap) így szükséges ezek pontos megadása. A kialakuló gerjesztés alakját legegyszerűbben a csomógömbök (g) és csomólapok (l) számának megadásával lehetne leírni, azonban történeti okból a főkvantumszámmal: $n = g + l + 1$ és

¹⁷Többelektronos rendszerekben az elektronok egymáshatása kismértékben eltolja az energiaszinteket, így egy adott héjon lévő s pályájának energiája valamivel kisebb, mint p energiája.

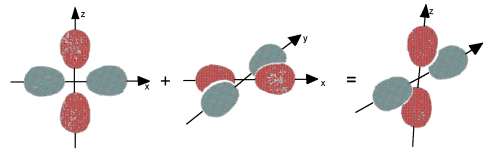
a mellékkvantumszám: $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ betűjevével: s, p, d, f, \dots tesszük.

A térbeli irányultsággal bíró pályák (ahol $l \neq 0$) orientációját a „mágneses” kvantumszámmal (m) különböztetjük meg, melynek értéke:

$$-l \leq m \leq l$$

között lehet. Ebből következően adott l mellékkvantumszámhoz összesen $2l + 1$ különböző pályaaorientáció tartozik ($m = 0$ is lehetséges).

Egy atomi elektron állapotának teljes megadása az (n, l, m) kvantumszámhármassal lehetséges.

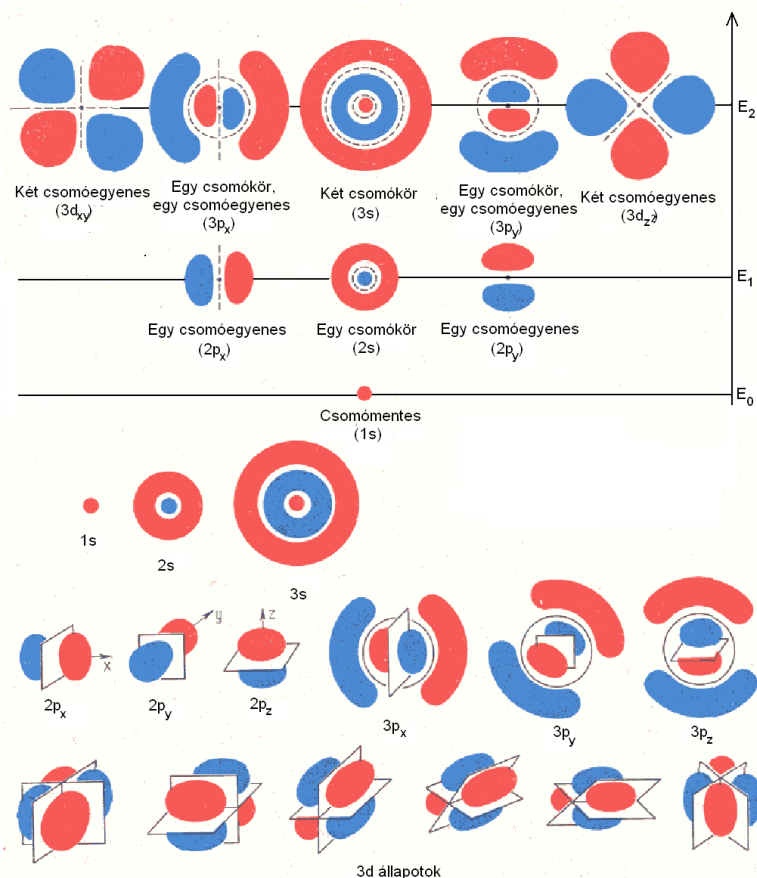


3.14. ábra. *A hatodik p állapot kikeverése*

Felvetődhet a kérdés, hogy hány elektron fér el egy adott n főkvantumszámmal jellemzett héjon. Mivel adott n főkvantumszámú héjhoz l -nek $n - 1$ értéke tartozhat, valamint adott l mellékkvantumszámhoz összesen $2l + 1$ irányultság, így egy adott n főkvantumszámú héjon maximálisan:

$$N(n) = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2n^2 \quad (3.24)$$

elektron tartózkodhat. Az első héjak maximális elektronszámai tehát: 2,8,18,32. A képlet elején megjelenő kettes szorzó magyarázatot kíván. A fenti kvantumszámokkal megadott tulajdonságok mellett van még egy jellemzője minden elektronnak. Ez a spin, mely az elektron saját mágneses viselkedéséről tájékoztat. Minden elektron mágneses dipólusként („iránytű”) viselkedik, azonban azzal a specialitással, hogy csak két irányba („fel”) és („le”) mutathat a tengelye. Így a fenti három kvantumszám mellett az elektron teljes jellemzéséhez be kell vezetni a spinkvantumszámot (s) is, melynek értéke – konvencionálisan – a „fel” és a „le” állapotokban: $s = 1/2$ és $s = -1/2$.



3.13. ábra. Elektronállapotok az atommag körül (A csomógömböket – mivel a vetületüket látjuk – itt csomóköröknek nevezzük.)

Ezek után már kimondhatjuk a Pauli-elvet, amely szerint az elektronoknak legalább egy kvantumszámban különbözniük kell, azaz

az elektronok nem lehetnek azonos kvantumállapotban.

Így minden egyes (n, l, m) kvantumszámhármassal jellemzett állapotban maximálisan két, ellentétes spinű elektron tartózkodhat.

Röviden szólni kell még az alapállapot és a különböző gerjesztett állapotok energiáiról. Az alapállapotú H-atomban az elektron kötési energiája

$$E_0 = -13,6 \text{ eV} = -2,2 \text{ aJ.}$$

A negatív előjel jelzi azt, hogy az elektron *kötött* állapotban van. Ennyi energia szükséges

tehát ahhoz, hogy az alapállapotú elektront kiszakítsuk a mag vonzásából, azaz végtelen távol vigyük a magtól. (Azért szükséges végtelen távolra vinni, mert a Coulomb-erő hatótávolsága végtelen. Természetesen a gyakorlatban már szabadnak tekintjük az elektront, ha az atomátmérőhöz képest elég nagy távolságban van.)

A gerjesztett állapotok energiája – ami a H-atom Coulomb-mezejének sajátossága – csak a csomók számával, pontosabban éppen a főkvantumszámmal $(n = k + l + 1)$ arányos, az alábbi módon:

$$E_n = -\tilde{R} \frac{1}{n^2} \quad (3.25)$$

ahol $\tilde{R} = \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}$. A elég csúnya állandót tartalmazó képletről elegendő azt tudni, hogy

a növekvő főkvantumszámmal (erősebb gerjesztéssel) az elektron egyre gyengébben var kötve a maghoz, de az inverz négyzetes függés miatt egyre kisebb lépésekben csökken a kötöttsége. A szabad elektronnak az $n \rightarrow \infty$ felel meg, ekkor $E_\infty = 0$, azaz az elektron szabad, nem köti a mag.

Tudható még, hogy a mag töltésének növelésével az elektron kötöttsége erősebbé válik csökken az elektronállapot átmérője, az energiaszintek mélyebbre süllyednek.

Vegyük észre, a fenti és a (3.5) képlet közötti kapcsolatot. A vonalas színeképnél leírtakkal összevetve látjuk, hogy a gerjesztés után kibocsátott fény energiája éppen az elektron gerjesztett és kiindulási állapotának energiakülönbsége. Tegyük fel, hogy az elektron kezdetben az m jelű pályán van, és külső gerjesztés az n , ($n > m$) pályára viszi. Amikor innen visszatér újra az m pályára ($n \rightarrow m$) az $E_n - E_m$ energiakülönbséget (természetesen $E_m > E_n$ és $E_m, E_n < 0$) egy foton kibocsátásával adja le. Így a kibocsátott foton energiája:

$$E_{\text{foton}} = E_n - E_m = -\tilde{R} \frac{1}{n^2} + \tilde{R} \frac{1}{m^2} = \tilde{R} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (3.26)$$

Ezt összevetve a 3.1.4. fejezet (3.5) kifejezésével, valamint a foton energiáját megadó $E_{\text{foton}} = h\nu$ kifejezést felhasználva azt nyerjük, hogy $\tilde{R} = hR$, azaz kvantummechanikai magyarázatát adtuk a vonalas színeképnél.

A többelektronos rendszerekben kialakuló helyzet sokkal bonyolultabb, hiszen az elektronok egymásra is hatással vannak. Itt már csak számításgépes közelítő módszerek működőképeseek, azonban ezek az adott szakterület feladatát képezik.

3.2.8. Milyen a Hold amikor nem nézem?

Ezt a kérdést Arisztotelész tette fel, a válasz pedig az lehet rá, hogy ugyanolyan mint amikor nézem, sárgásfehér és kerek. A mikrofizikában az ilyen típusú kérdésre adott válasz már nem ennyire triviális.

Vegyük górcső alá a helymeghatározás folyamatát. Ha elég „durván” is eljárhatok, egyszerűen kitapogatom a test helyét. Ekkor szükségszerűen kölcsönhatásba kell lép-

n	1	2	3	4	5	6	7
l	0	0 1	0 1 2	0 1 2 3	0 1 2 3 4	0 1 2	0 1 ...
1 H	1						
2 He	2						
3 Li	2	1					
4 Be	2	2					
5 B	2	2	1				
6 C	2	2	2				
7 N	2	2	2	1			
8 O	2	2	2	2			
9 F	2	2	2	2	1		
10 Ne	2	2	2	2	2		
11 Na	2	2	2	2	2	1	
12 Mg	2	2	2	2	2	2	
13 Al	2	2	2	2	2	2	1
14 Si	2	2	2	2	2	2	2
15 P	2	2	2	2	2	2	2
16 S	2	2	2	2	2	2	2
17 Cl	2	2	2	2	2	2	2
18 Ar	2	2	2	2	2	2	2
19 K	2	2	2	2	2	2	2
20 Ca	2	2	2	2	2	2	2
21 Sc	2	2	2	2	2	2	2
22 Ti	2	2	2	2	2	2	2
23 V	2	2	2	2	2	2	2
24 Cr	2	2	2	2	2	2	2
25 Mn	2	2	2	2	2	2	2
26 Fe	2	2	2	2	2	2	2
27 Co	2	2	2	2	2	2	2
28 Ni	2	2	2	2	2	2	2
29 Cu	2	2	2	2	2	2	2
30 Zn	2	2	2	2	2	2	2
31 Ga	2	2	2	2	2	2	2
32 Ge	2	2	2	2	2	2	2
33 As	2	2	2	2	2	2	2
34 Se	2	2	2	2	2	2	2
35 Br	2	2	2	2	2	2	2
36 Kr	2	2	2	2	2	2	2
37 Rb	2	2	2	2	2	2	2
38 Sr	2	2	2	2	2	2	2
39 Y	2	2	2	2	2	2	2
40 Zr	2	2	2	2	2	2	2
41 Nb	2	2	2	2	2	2	2
42 Mo	2	2	2	2	2	2	2
43 Tc	2	2	2	2	2	2	2
44 Ru	2	2	2	2	2	2	2
45 Rh	2	2	2	2	2	2	2
46 Pd	2	2	2	2	2	2	2
47 Ag	2	2	2	2	2	2	2
48 Cd	2	2	2	2	2	2	2
49 In	2	2	2	2	2	2	2
50 Sn	2	2	2	2	2	2	2
51 Sb	2	2	2	2	2	2	2
52 Te	2	2	2	2	2	2	2
53 I	2	2	2	2	2	2	2
54 Xe	2	2	2	2	2	2	2

3.15. ábra. Elektronállapotok betöltődésének sorrendje

nünk vele, ez a hatás például egy ruhásszekrényen nem okoz számottevő változást. Finomabb objektumok esetén azonban „finomabb” módszert kell keresni. Természetesen adódik a nézéssel való helymeghatározás. Azonban ha egy testet látni szeretnék, azt meg kell világítani, azaz fotonokat kell ráejteni. Ekkor a róla visszaverődő és a szemünkbe jutó fotonok révén érzékeljük azt. A kiemelt „visszaverődés” szó lesz a jelenség kulcsfogalma. Ekkor jön ugyanis létre a kölcsönhatás a megfigyelő és a megfigyelt objektum között.

A megfigyeléshez szükséges fotonok nem okoznak számottevő állapotváltozást a szekrényen, de még egy porszemén sem. Azonban a mikroszkopikus mérettartományban a foton(ok) által szállított energia (impulzus) már számottevő szerephez juthat. (Lásd például az ún. Compton-effektust, ahol a foton meglöki az elektront.) Tehát a mikroszkopikus tartományokban egy újabb, egészen furcsa eset állt elő: a megfigyelő és a megfigyelt

kölcsönhat¹⁸, azaz

ha megfigyelem a mikrorészecskét, az már nem úgy viselkedik, mint amikor nem figyelem, hiszen megfigyelésem befolyásolja viselkedését.

Ezek után viszont kijelenthetjük, hogy arra a kérdésre, hogy *milyen az elektron, amikor nem nézem*, nem adhatok megnyugtató választ, hiszen ha nem nézem meg nem fogom megtudni, ha viszont megnézem, akkor „zavaró” figyelem hatására már más módon viselkedik.

A figyelmes Olvasó javasolhatná, hogy csökkentendő a zavaró hatást, a megfigyeléshez használjunk csak *egy* foton. Azonban – például egy elektronnal való kölcsönhatás során – még egy foton is számottevő impulzussal bírhat. További javaslatként fel lehet vetni, hogy csökkentjük a vizsgálatához használt foton frekvenciáját, ekkor ugyanis a $p = h\nu$ alapján csökken a szállított impulzus. Így a frekvencia csökkentésével a megfigyelés zavaró hatása is csökkenne. Vegyük észre azonban, hogy ekkor öngóit lőnének, ugyanis a frekvencia csökkentésével a foton hullámhossza megnő, és így számára „észrevehetetlenek” lesznek a hullámhosszánál kisebb objektumok, azaz alkalmatlan lesz a megfigyelésre. G. Gamow megfogalmazásában: „Nem lehet perzsa miniatúrát festeni szobafestőecsettel.”

3.2.9. A részecske–hullám kettősség, sajátállapotok

A hullámfüggvény valamint a kvantummechanikai koordináta és impulzus bevezetésével kapcsolatban láttuk, hogy egy fizikai objektumnak lehet határozott impulzusa, ekkor azonban a helye határozatlan. Valamint ha a helyét tesszük határozottá az impulzusa válik határozatlanná. Ezek alapján vezessük be az alábbi fogalmakat. Ha egy objektum impulzusa maximálisan határozott (minimális bizonytalanságú), akkor azt mondjuk, hogy az objektum *impulzus-sajátállapotban* van. Ha impulzusa csak jól meghatározott, akkor *impulzus-közeli állapot*ról beszélhetünk. Ezek analogonjaként a teljesen határozott koordinátájú részecske *koordináta-sajátállapotban* van, míg a jól lokalizált (kis koordinátabizonytalanságú) objektum *koordináta-közeli állapotban*. Mint a határozatlansági relációkból látszik *egy részecske nem lehet egyszerre impulzus és koordináta-sajátállapotban*¹⁹. Termé-

¹⁸Természetesen makroszinten is van kölcsönhatás, csak ennek a nagy tömegű testekre nincs érzékelhető hatása.

¹⁹Ez azonban a makrovilágban nem bír jelentőséggel, hiszen egy hétköznapi test esetében annak helye és impulzusa egyszerre mérhető (szinte) tetszőleges pontossággal.

szetes módon adódik az is, hogy erősen határozott koordinátához erősen határozatlan impulzus társul és fordítva.

Egy test természetesen lehet sem hullámközeli, sem impulzusközeli állapotban, ez az állapotok „ideális házassága”, itt egyik sem erősen határozott, ezért párja sem erősen határozatlan. Az ilyen állapot hullámfüggvényének szemléletes neve: hullámcsomag, alakjáért lásd a 3.6 ábrát!

A fenti megfontolásokkal eljutottunk tehát odáig, hogy a klasszikus keretek között zavarba ejtő részecske–hullám kettősség már könnyen értelmezhető. Egy fizikai objektum impulzus-sajátállapotban hullámként, míg koordináta-sajátállapotban részecskeként viselkedik. Valamely foton, amikor interferenciára képes, (például diffrakciót szenved) impulzus-sajátállapotban van, elektronnal ütközve (fotoeffektus), pedig koordináta-sajátállapotban, ez felel meg a klasszikus részecske elképzelésnek. Teljesen hasonlóan – hullám-sajátállapotban lévő elektron feltételezésével – magyarázható Jönsson híres kísérlete (1961), amelyben elektronokkal végezte el Young kétréses kísérletét. Az elektron-detektorokból kialakított felfogóernyőn a fényvel elvégzett kísérletekkel megegyező intenzitás-eloszlást produkáltak a koherens elektronok – amelyek ebben az esetben tehát hullámként viselkedtek.

3.2.10. Schrödinger macskája, a tudat és a hullámfüggvény

A fentiek alapján nem lesz nehéz megérteni Schrödinger híres gondolatkísérletét. Alaphelyzetben adott egy macska egy lezárt dobozban. A dobozban a macskán kívül van még egy radioaktív anyag és egy detektor, amely figyel, hogy bekövetkezik-e bomlás az anyagban. A radioaktív anyag aktivitása akkora, hogy egy perc alatt átlagosan $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következik be benne bomlás. Ha a doboz lezárásától kezdődő egy percben bekövetkezik bomlás, akkor egy kis szerkezet eltör egy mérget tartalmazó kapszulát és a macska elpusztul. Amennyiben az adott idő alatt nem következik be bomlás, a macska túléli ezt

a kellemetlen kalandot. Ezt a – jobblelkű állapotvédőkben garantáltan felháborodást kiváltó – kvantum orosz-rulettet az irodalom az elnéző „Schrödinger macskája” néven tartja számon. A jelenség értelmezéséhez ismerni kell még azt a tényt, hogy semmilyen fizikai módszerrel nem jósolható meg, hogy a radioaktív anyagban bekövetkezik-e bomlás a következő időegységben. (Ez természetesen abból fakad, hogy a radioaktív bomlást kvantumos törvények vezérlik.)

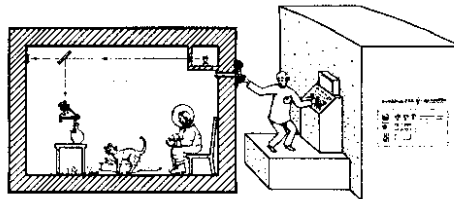
Tegyük fel, hogy összeállítjuk a kísérletet, betesszük a macskát, lezárjuk a dobozt és kívárujuk az egy percet. Ekkor a macska vagy elpusztult, vagy él, állapota a továbbiakban már nem változik. A doboz kinyitása nélkül mit tudunk mondani a macskáról? Csak annyit, hogy mind az élő, mind az elpusztult állapot valószínűsége $\frac{1}{2}$. Ebben az esetben kitűnően használható a hullámfüggvény, mint a bizonytalan állapotok leírója. Írjuk fel – persze szimbólikusan²⁰ – a macska hullámfüggvényét:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{él}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{elpusztult}).$$

Tehát a macska „összetett” állapotban van, az élet és a halál szuperponált állapotában, *egyszerre* él ($\frac{1}{2}$ valószínűséggel) és *egyszerre* halott (szintén $\frac{1}{2}$ valószínűséggel), ez a kvantummechanikára olyan jellemző „kevert” állapot. Azonban a macska a dobozban valószínűleg – bár ennek eldöntésére nincsen mód – nem alakult át egy valamilyen, eddig még nem látott félig élő-félig halott kombinációvá, az vagy él, vagy elpusztult. Mivel azonban a pusztulását kiváltó esemény (a radioaktív bomlás) bekövetkezése nem jósolható, így nekünk *nincs jogunk* a macska állapotáról *biztosat állítani*, tehát csak a hullámfüggvényes leírásmódot alkalmazhatjuk.

Mi történik a macskánk hullámfüggvényével, ha kinyitjuk a dobozt és belenézünk? Természetesen a hullámfüggvény beleesik az élő vagy a halott állapotba. Azaz ha a macska túlélte a kísérletet, akkor $\psi = (\text{él})$ ha elpusztult, $\psi = (\text{elpusztult})$ állapotba kerül. Ezek az állapotok már tiszta állapotok.

²⁰A macska nagyságrendileg 10^{24} darab atomjának együttes hullámfüggvénye természetesen nehezen lenne fölírható.



3.16. ábra. Schrödinger macskája – ráadásokkal

Mint látható a kvantummechanika eszköz és fogalomkészletével a fenti információhiányos rendszer jól leírható – bármilyen mesterkéltnek tűnik is. A baj a szemléletünkkel van. Hogyan képzeljük el a „kevert” állapotú (egyszerre élő és halott) macskát? Látható, hogy a hullámfüggvény akkor esik bele egy „tiszta” állapotba, ha a dobozt kinyitjuk és belenézünk. Hogyan tudja egy ilyen összetett rendszer hullámfüggvényét – ami pusztán egy egyszerű matematikai konstrukció – a megfigyelésünk befolyásolni²¹? Mi lenne ha csak kinyitnánk, de nem néznénk bele? Úgy érezzük, hogy a hullámfüggvény kevert állapotban maradna. De mi lenne a helyzet, ha egy *ló*, vagy egy *csecsemő* nézne bele, aki nem tud a kísérlet céljáról, értelméről és értelmezéséről. Számukra egy élő vagy elpusztult macska nem hordoz információt. Ennek ellenére vajon beesne a hullámfüggvény egy tiszta állapotba?

A probléma tovább bonyolítható. Egy, a dobozban ülő megfigyelő folyamatosan tudja követni az eseményeket, az ő számára a macska hullámfüggvénye folyamatosan tiszta állapotban van. A dobozon kívül figyelők számára azonban a hullámfüggvény szuperponált. Hogyan lehet, hogy *ugyanazt* a testet leíró hullámfüggvény (tehát az állapot teljes meghatározója) a két megfigyelő számára különböző? Létezhet az, hogy egy macska az egyik megfigyelő számára élő (vagy halott), egy másik számára egyszerre élő és halott? Egyáltalán ellentmondás ez?

²¹Itt természetesen nem arról van szó, mint a helymeghatározásnál, hogy a megfigyeléshez használt foton befolyásolja a macska hullámfüggvényét, ugyanis az vagy az élő, vagy a halott, de mindenképpen *jól meghatározott* állapotba kerül. Annak közel nulla a valószínűsége, hogy egy „kósza” foton a hullámfüggvényt pontosan a két *konkrét* állapot valamelyikébe vigye.

Egyes értelmezések szerint – bár ezek csak feltételezések –, a hullámfüggvény értelmezése–viselkedése a megfigyelő *tudatával* van kapcsolatban. Annak, aki tud a kísérlet értelméről és úgy figyel az eseményeket a hullámfüggvény ezek szerint mást jelent, mint a kísérletet néző lónak. A különbséget a megfigyelő és a ló között talán éppen a tudatosságban lehet keresni. A valóban súlyos probléma:

hogyan lehetnek mások a fizika törvényei egy tudatos (vagy csupán „élő”) megfigyelő és például egy garantáltan nem tudatos (nem élő) elektrondetektor számára.

Wigner Jenő szerint a kvantummechanikát leíró egyenletek „elromlanak” a tudatos (vagy „élő”) lények környezetében (hatására).

John Wheeler²² más, de nem kevésbé megdöbbentő álláspontot képvisel. Szerinte, mivel a világot kvantumtörvényeknek engedelmeskedő mikrorészecskék alkotják, így a kvantumjelenségeknek makroszinten is jelentkezniük kell. Ennek egy megnyilvánulási formája, hogy jelenbeli cselekedeteink hatással bírnak a múlttól tett állításainkra, azaz a megfigyelő – ő már tudatos! – jelenléte teszi érzékelhető valósággá a jelent. Így nem okoznak problémát a „különböző macskák”, hiszen mindegyiket más-más megfigyelő jelenléte teszi létezővé, nem kell azonosnak lenniük²³.

Hugh Everett egy harmadik megoldást javasolt. Szerinte minden egyes döntés során minden egyes kimenet megvalósul, és így minden egyes mérés (pontosabban minden egyes kvantum esemény) során a világ kettő (vagy több) részre ágazik. Így minden megfigyelőhöz találhatunk a világok hihetetlen gazdagságában egy olyat, amely pontosan leírja az ő képét.

Egy másik kvantummechanikai iskola szerint a hullámfüggvénynek statisztikus értelmezést kell tulajdonítanunk. Ekkor az egy perc letelte után a macska 50% valószínűséggel él, illetve 50% valószínűséggel pusztult el, de állapota tiszta, azaz a macska hullámfüggvénye vagy $\Psi = (\text{él})$ vagy $\Psi = (\text{elpusztult})$. A

statisztikus értelmezés pedig azt jelenti, hogy 1000 kísérletet elvégezve körülbelül 500 túlélő és 500 elpusztult macskánk lesz, amelyek állapotai a dobozok kinyitása nélkül is tiszta állapotok – de azokról nem mondhatunk semmit.

Anélkül, hogy a kérdést megpróbálnánk eldönteni, egy Mantaigne idézettel zárjuk a fejezetet:

Ha macskámmal játszom, ki mondja meg, vajon én vagyok-e az ő játékszere s nem ő az enyém?

²²Wigner veje.

²³Ennek egy érdekes következménye, hogy a történelemnek (múltnak) nincs jelentése (nem is létezik), csak olyan formában, ahogy feljegyezzük.

Tárgymutató

- atomi elektronpályák, 47
- centrális erőtér, 10
- Coulomb-törvény, 10
- de-Broglie hullámhossz, 36
- dielektromos állandó
 - relatív, 14
 - vákuumé, 9, 16
- dipólus, 14
 - potenciálja, 15
 - téरेje, 15
- ekvipotenciális felület, 11
- elektromos feszültség, 11
- elektromos térerősség, 7
- elektrosztatikus kölcsönhatás, 7
- elhajlás (diffrakció), 25
- erősítés
 - harmonikus rezgéseké, 21
- fázis
 - harmonikus rezgésé, 19
 - hullámé, 24
- fázissebesség, 24
- főkvantumszám, 46
- felbontóképesség, 31
- Fermat-elv, 31
- feszültség, 11
 - Coulomb-téré, 13
 - homogén téré, 11
 - kapcsolata a potenciállal, 11
- fluxus, 8
- fotoeffektus, 33
- foton, 33
 - energiája, 34
 - impulzusa, 34
- Gauss-törvény, 9
- gyengítés
 - harmonikus rezgéseké, 21
- harmonikus oszcillátor
 - klasszikus, 19
 - kvantummechanikai, 45
- harmonikus rezgés, 19
 - kapcsolata a forgóvektorokkal, 20
 - kapcsolata a komplex számokkal, 22
- határozatlansági reláció, 39
- határszög, 32
- hatáskvantum, 36
- homogén tér, 8
- hullám, 23
- hullámfüggvény, 37–39
- hullámsebesség, 24
- Huygens–Fresnel-elv, 24
- időálló, 17
- interferencia, 24
- Kétréses kísérlet, 26
- kapacitás, 16
- kettős természet, 50
- kettős természet (fényé), 34
- kettősréteg, 16
- kilépési munka, 34
- kondenzátor, 16
- korrespondencia-elv, 37
- lebegés, 22
- mérés (kvantummechanikai), 40
- Maxwell I. törvénye, 9
- mellékvantumszám, 46
- mikroszkóp, 29
 - fáziskontraszt, 32
 - felbontóképesség, 29
- Planck-állandó, 34
- potenciál
 - Coulomb-téré, 13
 - kapcsolata a térerősséggel, 12
- rács, 28
- rész, 29
- rezgések összetétele, 21

sajátállapot, 50
Schrödinger macskája, 50
Snellius–Descartes-törvény, 31
szigetelők, 14

törésmutató, 31
térerővonal, 8

vezetők, 14
vonalas színek, 35

Young-féle interferencia, 26